MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
080821

15 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen. Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_K z^2(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,$$
där $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z^2, \text{ och } x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. 5 p

2. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2},$$
där γ är kurvan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = ((1+t)\cos t, (1+t)\sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Beräkna även motsvarande integral då $0 \le t \le 6\pi$. 5 p

3. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x,y,z)$ genom ytan $z = \cos(x^2+y^2)$, $x^2+y^2 \le \pi$. Ytans normal har positiv z-komponent. 5 p

4. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$
där $\mathbf{F} = (ye^x, e^x + x^3 + e^z, ye^z)$ och γ är skärningskurvan mellan cylindern $x^2+y^2 = 1$ och ytan $z = 2xy$, orienterad på så sätt att den ortogonala projektionen på xy-planet är orienterad moturs. 5 p

5. a) Avgör om följande serier konvergerar eller ej:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k (k!)^2}{k^{2k}}.$$
2 p

b) Summera serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{k(k+2)} x^k,$$
samt ange dennas konvergensintervall. 3 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 5 p

7. Bevisa att en absolutkonvergent serie är konvergent. 5 p

Skrivningsåterlämning tisdagen den 26 augusti kl 10.45 utanför sal 15.