Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2008-08-21.

1. De två ytorna $x^2+y^2=z^2$ och $x^2+y^2+z^2=1$ skär varandra då $x^2+y^2=1-x^2-y^2$, dvs för $x^2+y^2=\frac{1}{2}, z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Området består därför av två symmetriska delar som ger lika stor integral. Övergång till polära koordinater ger

$$\iiint_K z^2(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz =$$

$$= 2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(r\cos\theta)^2 r^2 r^2 \sin\theta\,d\theta d\varphi dr =$$

$$= 2\int_0^1 r^6\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta =$$

$$2\left[\frac{1}{7}r^7\right]_0^1 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta =$$

$$= \begin{bmatrix} t = & \cos\theta \\ dt = & -\sin\theta d\theta \end{bmatrix} = \frac{4\pi}{7}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} t^2(-dt) =$$

$$= \frac{4\pi}{7}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t^2\,dt = \frac{4\pi}{7}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{\pi}{21}\left(4-\sqrt{2}\right).$$

2. Vi obseverar först att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

integration är alltså oberoende av vägen så länge vi undviker origo. Om vi tillfogar linjestycket γ_0 från punkten $(1+2\pi, 0)$ till punkten $(1,0)$ så får vi en enkel sluten kurva som omlöper origo ett varv i positiv led. Eftersom integralen över γ_0 blir lika med 0 (både y och dy är ju 0), så är den ursprungliga integralen lika med cirkulationen av av samma integrand längs en godtycklig kurva som omlöper origo ett varv i positiv led, t ex $(x,y)=(\cos t,\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$. Denna är, enligt en standardkalkyl som finns i boken, lika med 2π.

Om vi i stället betraktar motsvarande kurva för $0\le t\le 6\pi$ så kan den också tillslutas till en sluten kurva genom att i det här fallet tillfoga linjestycket från punkten $(1+6\pi,0)$ till punkten $(1,0)$. Den uppkomna kurvan är inte enkel, men kan deformeras till unionen av tre enkla slutna kurvor som alla omlöper origo ett varv i positiv led. Integralen blir därför lika med $3\cdot 2\pi = 6\pi$.

3. Låt Y vara ytan

$$\{(x,y,z) : z=\cos(x^2+y^2), x^2+y^2\le\pi\}$$

och

$$Y_0 = \{(x,y,z) : z=-1, x^2+y^2\le\pi\}$$

(med normalen nedåt). Då utgör $Y\cup Y_0$ randen till en enkel sluten yta på vilken vi kan tillämpa Gauss sats:

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV,$$

$$K = \{(x,y,z) : -1\le z\le\cos(x^2+y^2), x^2+y^2\le\pi\}.$$

$$\iint_{Y_0} = \iint_{x^2+y^2\le\pi}(x,y,-1))\cdot(0,0,-1)\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le\pi} 1\,dxdy = \pi^2.$$

Vidare får vi för divergensintegralen

$$\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_K 3\,dxdydz.$$

$$= 3\iint_{x^2+y^2\le\pi}\left(\int_{-1}^{\cos(x^2+y^2)}dz\right)dxdy$$

$$= 3\iint_{x^2+y^2\le\pi}\big(\cos(x^2+y^2)+1\big)\,dxdy$$

(efter övergång till polära koordinater)

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{\pi}}(\cos r^2+1)r\,drd\theta$$

$$= 6\pi\left[\frac{1}{2}\sin r^2+\frac{1}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 3\pi^2.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 3\pi^2-\pi^2 = 2\pi^2.$$

4. Med hjälp av Stokes sats kan vi skriva

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \mathbf{rotF}\cdot\mathbf{N}\,dS,$$

där Y är den del av grafen $z = f(x,y) = 2xy$ som ligger innanför cylindern $x^2+y^2 \le 1$, och $\mathbf{N}$ är den uppåtriktade normalen.

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^x & e^x + x^3 + e^z & ye^z \end{vmatrix} = (0,0,3x^2),$$

vilket ger

$$\iint_Y \mathbf{rotF}\cdot\mathbf{N}\,dS, =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (0,0,3x^2)\cdot(-f'_x, -f'_y, 1)\,dxdy =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} 3x^2\,dxdy = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2 r dr d\theta$$

$$3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = 3\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

5. Vi använder kvotkriteriet för positiva serier:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{4^{k+1}((k+1)!)^2}{(k+1)^{2(k+1)}}}{\frac{4^k(k!)^2}{k^{2k}}}$$

$$= 4\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^{-2} \to \frac{4}{e^2} < 1.$$

Serien är alltså konvergent.

b) Sätt $z = 2x$. Vi får

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k+1}}{k(k+2)}x^k = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}z^k$$

$$= 2z^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{z^{k+2}}{k+2} = 2z^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\int_0^z y^{k+1}\,dy =$$

$$= 2z^{-2}\int_0^z\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}w^{k+1}\right)dw$$

$$= 2z^{-2}\int_0^z w\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}w^k\right)dw$$

$$= 2z^{-2}\int_0^z w\left(\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^w u^{k-1}\,du\right)dw$$

$$= 2z^{-2}\int_0^z w\left(\int_0^w\left(\sum_{k=1}^{\infty}u^{k-1}\right)du\right)dw$$

$$= 2z^{-2}\int_0^z w\left(\int_0^w\frac{1}{1-u}\,du\right)dw$$

$$= 2z^{-2}\int_0^z w\,(-\ln(1-w))\,dw$$

$$= 2z^{-2}\left(-\frac{1}{2}z^2\ln(1-z) - \frac{1}{2}\int_0^z\frac{w^2}{1-w}\,dw\right)$$

$$= -\ln(1-z) - z^{-2}\int_0^z\left(-w-1+\frac{1}{1-w}\right)dw$$

$$= -\ln(1-z) + z^{-2}\left(\frac{z^2}{2}+z+\ln(1-z)\right)$$

$$= -\ln(1-z) + \frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \frac{\ln(1-z)}{z^2}$$

$$= -\ln(1-2x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{\ln(1-2x)}{4x^2}.$$

För konvergensradien fås enligt känd formel

$$R = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{2^{k+1}}{k(k+2)}}{\frac{2^{k+2}}{(k+1)(k+3)}} = \frac{1}{2}.$$

I ändpunkterna $x = \frac{1}{2}$ och $x = -\frac{1}{2}$ fås serierna

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k(k+2)} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k(k+2)}$$

som båda är absolutkonvergenta enligt jämförelse med den konvergenta serien

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Konvergensintervallet blir därför $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.