MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
090526

15 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_K (2x^2 + 2y^2 + z^2)\, dxdydz,$$
där $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 1\}$. 5 p

2. a) Visa att vektorfältet
$$\mathbf{F} = \left(\frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}, \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} \right)$$
är ett potentialfält i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ och bestäm en potential. 3 p

   b) Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
där γ är linjestycket från punkten $(1, 1)$ till punkten $(-1, 3)$. 2 p

3. Låt $\mathbf{F} = (yz^2 + y, xz^2, 2xyz))$. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$
där γ är kurvan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, 4 \sin^2 t \cos^2 t)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$. 5 p

4. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$
där $\mathbf{F} = (y^4, x^4, z^4 + 1)$, Y är ytan $\{(x^2 + y^2)^2 + z^4 = 1, z \geq 0\}$, och $\mathbf{N}$ är den enhetsnormal som har positiv z-komponent. 5 p

5. a) Avgör om följande serie konvergerar:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k(-1)^k}{k!}.$$
2 p

   b) Ange följande potensseries konvergensintervall:
$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k + 2)2^{-k}x^k.$$
Beräkna även serien
$$\sum_{k=1}^{\infty} k(k + 2)2^{-k}.$$
3 p

V.G.V.

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa Greens formel i planet med en under- och en överdel och en höger- och en vänsterdel. Skissera sedan hur Greens formel kan fås för mer allmänna områden i planet. 5 p

7. Bevisa d'Alemberts kvotkriterium för serier: Antag att $a_k \neq 0$, $k \geq 1$ och att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to A \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

där $0 \leq A \leq \infty$. Om $0 \leq A < 1$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent, och om $1 < A$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. 5 p

Skrivningsåterlämning måndagen den 1 juni kl 10.00 i sal 22, därefter i rum 208, hus 6.