Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2009-05-26.

1.

Sätt $x' = x, y' = y, z' = 2z, dxdydz = \frac{1}{2}dx'dy'dz'$. Integrationsområdet övergår i enhets-sfären $B = \{(x', y', z') : (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \leq 1\}$:

$$\iiint_K (2x^2 + 2y^2 + z^2)\, dxdydz =$$

$$\frac{1}{2}\iiint_B (2(x')^2 + 2(y')^2 + \frac{1}{4}(z')^2)\, dxdydz =$$

$$\frac{1}{8}\iiint_B (8(x')^2 + 8(y')^2 + (z')^2)\, dx'dy'dz' =$$

Övergång till rymdpolära koordinater ger nu

$$\frac{1}{8}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (8r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta) r^2 \sin\theta\, d\theta d\varphi dr =$$

$$\frac{1}{8}\int_0^1 r^4\, dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (8\sin^2\theta + \cos^2\theta) r^2 \sin\theta\, d\theta =$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{5}\cdot 2\pi\cdot\int_0^{\pi} (8\sin^2\theta + \cos^2\theta) r^2 \sin\theta\, d\theta =$$

$$\frac{\pi}{20}\int_0^{\pi} (8\sin^2\theta + \cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$\frac{\pi}{20}\int_0^{\pi} (8 - 7\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$\frac{\pi}{20}\left[-8\cos\theta + \frac{7}{3}\cos^3\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{20}(8 - \frac{7}{3} + 8 - \frac{7}{3}) = \frac{17\pi}{30}.$$

2.

a) Vi börjar med att integrera förstakomponenten av $\mathbf{F}$:

$$\int \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}\, dx = \ln(x^2 + xy + y^2) + h(y).$$

Om vi deriverar m a p y och sätter lika med andra komponenten får vi sambandet

$$\frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2} + h'(y),$$

dvs $h'(y) = 0$. Om vi sätter $h(y) = 0$ så ser vi att

$$U(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$$

blir en potentialfunktion i hela området.

b) Eftersom vi nu har en potential så kan vi beräkna kurvintegralen genom

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = U(-1, 3) - U(1, 1) = \ln 7 - \ln 3.$$

3.

En enkel räking ger att $\operatorname{rot}\mathbf{F} =$

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 + y & xz^2 & 2xyz \end{vmatrix} = (0, , 0, -1),$$

Vi observerar vidare att kurvan γ ligger innehållen i ytan $z = 4x^2y^2$, och att den tillsammans med linjestycket γ_1 från punkten $(0, 1, 0)$ till $(0, -1, 0)$ bildar randen till den del Y av $z = 4x^2y^2$ vars projektion på x, y-planet är $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$. Vi ser också att orienteringen på randen är kompatibel med den orientering av Y som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 4x^2y^2)$.

Eftersom $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-z'_x, -z'_y, 1)$ följer att

$$\iint_Y \mathbf{rotF}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iint_D (0, , 0, -1)\cdot(-z'_x, -z'_y, 1)\, dxdy$$

$$= \iint_D (-1)\, dxdy = -\frac{\pi}{2}.$$

Vi ser också att

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{-\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} =$$

$$-\int_{-1}^{1} (y, 0, 0)\cdot(0, 1, 0)\, dy = -\int_{-1}^{1} 0\, dy = 0.$$

Stokes sats ger nu att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \mathbf{rotF}\cdot\mathbf{N}\, dS,$$

dvs

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

4.

Genom att till Y lägga botten

$$Y_0 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 1, z=0\}$$

(med normalen neråt) får vi en sluten yta på vilken vi kan tillämpa Gauss sats:

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdydz.$$

där $K = \{(x,y,z) : (x^2+y^2)^2 + z^4 \le 1, z \ge 0\}$. Vi får nu

$$\iint_{Y_0} = \iint_{x^2+y^2\le 1} (y^4, x^4, 1)\cdot(0,0,-1)\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\le 1} (-1)\,dxdy = -\pi.$$

Vidare får vi för divergensintegralen

$$\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F} = \iiint_K 4z^3\,dxdydz.$$

$$= \int_0^1 \left(4z^3 \iint_{x^2+y^2\le\sqrt{1-z^4}} dxdy\right) dz =$$

Den inre integralen motsvarar arean av en cirkel med radien $\sqrt[4]{1-z^4}$, vilket ger

$$\int_0^1 4z^3\cdot\pi\sqrt{1-z^4}\,dz = \pi\left[-\frac{2}{3}(1-z^4)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

5.

a) Eftersom

$$\frac{k^k}{k!} = \frac{k\cdot k\cdot k\cdot\ldots\cdot k}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} \ge 1$$

så måste serien vara divergent då ju termerna inte går mot noll.

b) För konvergensradien fås enligt känd formel $R = \lim_{k\to\infty}\frac{k(k+2)2^{-k}}{(k+1)(k+3)2^{-k-1}} = 2$. I ändpunkterna $x = -2$ och $x = 2$ fås serierna

$$\sum_{k=1}^\infty k(k+2)(-1)^k \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^\infty k(k+2)$$

som båda är divergenta eftersom termerna inte går mot 0. Konvergensintervallet blir därför $]-2,2[$.

Vi beräknar hela serien på konvergensintervallet. Sätt $z = x/2$. Vi får

$$\sum_{k=1}^\infty k(k+2)2^{-k}x^k = \sum_{k=1}^\infty k(k+2)z^k$$

$$= z\sum_{k=1}^\infty k(k+2)z^{k-1} = z\sum_{k=1}^\infty (k+2)D(z^k) =$$

$$= zD\left(\sum_{k=1}^\infty (k+2)z^k\right) = zD\left(\frac{1}{z}\sum_{k=1}^\infty (k+2)z^{k+1}\right)$$

$$= zD\left(\frac{1}{z}\sum_{k=1}^\infty D(z^{k+2})\right) = zD\left(\frac{1}{z}D\left(\sum_{k=1}^\infty z^{k+2}\right)\right)$$

$$= zD\left(\frac{1}{z}D\left(\frac{z^3}{1-z}\right)\right)$$

$$= zD\left(\frac{1}{z}\cdot\frac{3z^2(1-z)-z^3(-1)}{(1-z)^2}\right)$$

$$= zD\left(\frac{3z-2z^2}{(1-z)^2}\right).$$

$$= z\cdot\frac{(3-4z)(1-z)^2-(3z-2z^2)2(1-z)(-1)}{(1-z)^4}$$

$$= \frac{(3z-z^2}{(1-z)^3} = \frac{(12x-2x^2}{(2-x)^3}.$$

Den sökta serien fås nu genom att sätta $x = 1$:

$$\sum_{k=1}^\infty k(k+2)2^{-k} = \frac{12-2}{(2-1)^3} = 10.$$

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm, 090526/