MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
090820

15 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna volymen av området

$$K = \{(x, y, z) : |x - z^2| + |y - z^2| + z^2 \leq 1\}.$$

5 p

2. Bestäm konstanterna a och b så att kurvintegralen

$$\int_\gamma (ax^2y^2 + ye^{\sin x} \cos x)\, dx + (2x^3y + be^{\sin x})\, dy$$

blir oberoende av vägen, och beräkna därefter integralens värde då γ är kurvan $(x, y) = (\arctan t, t^2)$ där t går från 0 till 1. 5 p

3. Ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 1 - y^2$ skär varandra längs en sluten kurva. Låt γ vara denna kurva orienterad så att dess positiva riktning i punkten $(1, 0, 1)$ ges av vektorn $(0, 1, 0)$. Beräkna

$$\int_\gamma \left(y^2 + z\right)\, dx + z\, dy + xy\, dz.$$

5 p

4. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

där $\mathbf{F} = (x^3, y^3, x^2y^2)$, Y är ytan $z = \cos(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$, och $\mathbf{N}$ är den enhetsnormal som har positiv z-komponent. 5 p

5. a) Ange följande potensseries konvergensintervall:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k.$$

Beräkna därefter höger- och vänstergränsvärdet av $f(x)$ när x går mot konvergensintervallets vänstra respektive högra ändpunkt. 3 p

b) För vilka värden på det reella talet α konvergerar följande generaliserade integral?

$$\int_0^\infty \frac{\ln(1 + x)}{x^\alpha}\, dx.$$

2 p

V.G.V.

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa divergenssatsen för områden med en under- och en översida, en höger- och en vänstersida och en fram- och en baksida. Skissera sedan hur divergenssatsen kan fås för mer allmänna områden i rummet. 5 p

7. Bevisa Cauchys rotkriterium för serier: Antag att serien $\sum_1^\infty a_k$ är sådan att

$$|a_k|^{1/k} \to A \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

   där $0 \leq A \leq \infty$. Om $0 \leq A < 1$ så är $\sum_{k=1}^\infty a_k$ absolutkonvergent, och om $1 < A$ så är $\sum_{k=1}^\infty a_k$ divergent. 5 p

Skrivningsåterlämning tisdagen den 25 augustii kl 16.00 i rum 326 i hus 6, därefter i rum 208, hus 6.