Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2009-08-20.

1. Det kan bara finnas punkter $(x,y,z)\in K$ om $z^2\le 1$ eftersom $|x-z^2|+|y-z^2|\ge 0$.

$$V=\iiint_K dxdydz=\int_{-1}^{1}\left(\iint_{K_z} dxdy\right)dz,$$

där $K_z=\{(x,y): |x-z^2|+|y-z^2|\le 1-z^2\}$. K_z är en kvadrat med hörn i $(z^2\pm(1-z^2),z^2)$ och $(z^2,z^2\pm(1-z^2))$ som har sidan $\sqrt{2}(1-z^2)$ och arean $2(1-z^2)^2$,vilket ger

$$V=\int_{-1}^{1}2(1-2z^2+z^4)\,dz=$$

$$2\left[z-\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5\right]_{-1}^{1}=4(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5})=\frac{32}{15}.$$

2. Vi beräknar först

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y+be^{\sin x}\right)-$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(ax^2y^2+ye^{\sin x}\cos x\right)=$$

$$6x^2y+be^{\sin x}\cos x-2ax^2y-e^{\sin x}\cos x,$$

vilket blir noll om och endast om $a=3$ och $b=1$. Vi bestämmer en potential till vektorfältet för dessa värden på a och b genom att integrera P m a p x:

$$U=\int(3x^2y^2+ye^{\sin x}\cos x)\,dx=x^3y^2+ye^{\sin x}+\phi(y).$$

För att bestämma $\phi(y)$ deriverar vi m a p y och jämför med Q:

$$\frac{\partial U}{\partial y}=2x^3y+e^{\sin x}+\phi'(y)=Q+\phi'(y).$$

Vi kan därför helt enkelt välja $\phi(y)=0$. När vi nu har en potential beräknas kurvintegralen lätt:

$$\int_\gamma(3x^2y^2+ye^{\sin x}\cos x)\,dx+(2x^3y+e^{\sin x})\,dy=$$

$$U(\arctan 1,1^2)-U(\arctan 0,0^2)=U(\frac{\pi}{4},1)-U(0,0)=$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^3+e^{1/\sqrt{2}}-0=\frac{\pi^3}{64}+e^{1/\sqrt{2}}.$$

3. En enkel räking ger att $\operatorname{rot}\mathbf{F}=$

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2+z & z & xy\end{vmatrix}=(x-1,1-y,-2y),$$

Vi observerar vidare att kurvan γ ligger innehållen i ytan $z=1-y^2$, och att den bildar randen till den del Y av denna vars projektion på x,y-planet är $D=\{(x,y): x^2+2y^2\le 1\}$. Vi ser också att orienteringen på randen är kompatibel med den orientering av Y som ges av parametriseringen $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,1-y^2)$.

Eftersom $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=(-z'_x,-z'_y,1)=(0,2y,1)$ följer enligt Stokes sats att

$$\int_\gamma\left(y^2+z\right)\,dx+z\,dy+xy\,dz=$$

$$\iint_Y\mathbf{rotF}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_D(x-1,1-y,-2y)\cdot(0,2y,1)\,dxdy$$

$$=\iint_D((1-y)2y+(-2y)1)\,dxdy=-\iint_D 2y^2\,dxdy$$

$$\left[\begin{array}{rcl} x&=&r\cos\theta,\\ y&=&\frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta.\end{array}\right]=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta=$$

$$\frac{-1}{4\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{-1}{8\sqrt{2}}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\frac{-\pi}{4\sqrt{2}}.$$

4. Genom att till Y lägga botten

$$Y_0=\{(x,y,z): x^2+y^2\le\frac{\pi}{2}, z=0\}$$

(med normalen neråt) får vi en sluten yta på vilken vi kan tillämpa Gauss sats:

$$\iint_Y\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{Y_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iiint_K\operatorname{div}\mathbf{F}\,dxdydz.$$

där $K=\{(x,y,z): 0\le z\le\cos(x^2+y^2),\ x^2+y^2\le\frac{\pi}{2}\}$. Vi får nu

$$\iint_{Y_0}=\iint_{x^2+y^2\le\frac{\pi}{2}}(x^3,y^3,x^2y^2)\cdot(0,0,-1)\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}} (-x^2y^2)\, dxdy =$$

$$-\int_0^{\sqrt{\pi/2}} r^5\, dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta =$$

$(\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta))$

$$-\frac{1}{6}(\sqrt{\pi/2})^6 \int_0^{2\pi} \frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)\, d\theta =$$

$$-\frac{\pi^3}{48}\cdot\frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} = -\frac{\pi^3}{48}\cdot\frac{1}{8}\cdot 2\pi = -\frac{\pi^4}{192}.$$

Vidare gäller att $\text{div}\mathbf{F} = 3x^2 + 3y^2$. Vi får därför för divergensintegralen

$$\iiint_K \text{div}\mathbf{F} = 3\iiint_K (x^2+y^2)\, dxdydz =$$

$$3\iint_{x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}} (x^2+y^2)\left(\int_0^{\cos(x^2+y^2)} dz\right) dxdy =$$

$$3\iint_{x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}} (x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\, dxdy =$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 3r^3 \cos r^2\, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \left[t = r^2\right] = \int_0^{\pi/2} 6\pi t \cos t\, \frac{dr}{2}$$

$$= 3\pi\big[t\sin t\big]_0^{\pi/2} - 3\pi\big[\sin t\big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi^2 - 3\pi.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \frac{3}{2}\pi^2 - 3\pi + \frac{\pi^4}{192}.$$

5. a) För konvergensradien fås enligt känd formel $R = \lim_{k\to\infty} \frac{1/k}{1/(k+1)} = 1$. I ändpunkterna $x = -1$ och $x = 1$ fås serierna

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Den första är konvergent och den andra är divergent (alternerande respektive vanlig harmonisk serie). Konvergensintervallet blir därför $[-1, 1[$.

Det enklaste sättet att beräkna gränsvärdena är att först beräkna hela serien på konvergensintervallet. Vi får $f(x) =$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x t^{k-1}\, dt = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\right) dt$$

$$= \int_0^x \frac{dt}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x).$$

Härav följer omedelbart att

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} (-\ln(1-x)) = -\ln 2$$

och att

$$\lim_{x\to 1.} f(x) = \lim_{x\to 1-} (-\ln(1-x)) = \infty.$$

b) Integralen är generaliserad i både 0 och ∞ så vi undersöker integralerna

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\, dx \quad \text{och} \quad \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}\, dx$$

var och en för sig. Den första kan jämföras med

$$\int_0^1 \frac{x}{x^\alpha}\, dx = \int_0^1 x^{1-\alpha}\, dx$$

eftersom $\ln(1+x) = x + O(x^2)$. Enligt jämförelsekriterium 2 följer att integralen konvergerar om och endast om $1-\alpha > -1$, dvs om $\alpha < 2$.

Den andra integralen kan t ex undersökas med jämförelsekriterium 1 (eller 2): om $\alpha \le 1$ så ger jämförelse med integralen

$$= \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \infty$$

att vår integral är divergent, eftersom

$$c\frac{1}{x^\alpha} < \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$$

för något $c > 0$ och stora x. Om å andra sidan $\alpha > 1$ och $\alpha > \beta > 1$ så gäller att

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \le C\frac{1}{x^\beta}$$

för någon konstant C, vilket medför att integralen är konvergent enligt jämförelsekriterium 1.

Sammanfattningsvis konvergerar integralen om och endast om $1 < \alpha < 2$.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm, 090820/