MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Boris Shapiro, Petter Bränden

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
091216

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna volymen av *hela* kroppen begränsad av ytorna $z = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ och $|x| + |y| = 1$. 5 p

2. Låt den massiva kroppen K uppstå som skärningen mellan de två områden $x^2 + y^2 \leq z$ och $0 \leq z \leq 1$. Beräkna flödet ut ur ∂K för vektorfältet
$$\mathbf{F} = (x, y, z^2).$$
5 p

3. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma y^6 dx + x^3 dy + (x^2 z^2 + y^2 z^2) dz$ direkt och m.h.a. Stokes sats, där γ är skärningskurvan mellan ytorna $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och $x^2 + y^2 = z^2$, och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. 5 p

4. Visa att kurvintegralen $\int_\gamma (yz + y + z)\, dx + (xz + x + z)\, dy + (xy + x + y)\, dz$ är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$. Bestäm också kurvintegralens värde om γ är kurvan
$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-3t}{1+t^4}, \quad z = \frac{1-t^2}{1+t^6}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$
5 p

5. Vilka av serierna
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$
är konvergenta? Motivera svaret. 5 p

6. Bestäm konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} (n-2) x^n$. Bestäm den rationella funktion som på seriens konvergensintervall ger dess summa. 5 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

7. Formulera och bevisa Greens formel för områden i planet med *en* under- och *en* överdel och *en* vänster- och *en* högerdel. Skissera sedan hur Greens formel kan fås för mera allmänna områden i planet. 5 p

8. (Cauchys rotkriterium.) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är sådan att
$$|a_k|^{1/k} \to A \quad \text{då} \quad k \to \infty, \qquad \text{där} \quad 0 \leq A \leq \infty.$$
Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$, och divergent om $1 < A \leq \infty$. 5 p

Skrivningsåterlämning: fredag den 18 december kl 12.15-12.45 i sal 15 hus 5, därefter i rum 208, hus 6.