

Lösningförslag till tentament i Analys 4, 07-01-16

Problem 1. Beräkna volymen av kroppen begränsad av ytorna $z = x^2 + y^2$, $z \geq 0$ och $|x| + |y| = 1$.

Lösning. Denna kropp har fyra gånger så stor volym som kroppen K som ges av $\{0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$, $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Man har

$$\text{vol}(K) = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} dy \left[\int_0^{x^2+y^2} dz \right] \right] = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy \right] = 2 \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} x^2 dy \right].$$

$$\text{Vidare, } \text{vol}(K) = 2 \int_0^1 x^2(1-x) dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Svar. } 4 * \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Problem 2. Låt den massiva kroppen K uppstå som skärningen mellan de två områden $x^2 + y^2 \leq z$ och $0 \leq z \leq 1$. Beräkna flödet ut ur ∂K för vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x, y, z^2).$$

Skärningskroppen K ges utav $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Enligt divergenssatsen ges flödet utav

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K \text{div} \mathbf{F} dx dy dz = \iiint_K (1 + 1 + 2z) dx dy dz.$$

Trippelintegralen kan beräknas med upprepad integration som

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2 \leq z} (1+z) dx dy \right) dz = \\ & = 2 \int_0^1 \pi(1+z)z dz = 2\pi \int_0^1 z(1+z) dz = \\ & = 2\pi \left[\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5\pi}{3}. \end{aligned}$$

Problem 3. Beräkna kurvintegralen $\int_{\gamma} y^6 dx + x^3 dy + (x^2 z^2 + y^2 z^2) dz$ direkt och m.h.a. Stokes sats, där γ är skärningskurvan mellan ytorna $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och $x^2 + y^2 = z^2$, och γ 's omloppsriktning är sådan att γ 's projektion på xy -planet har positiv omloppsriktning.

Vi beräknar kurvintegralen direkt och genom att använda Stokes sats. Sambandet $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (en halvklotyta) ger insatt i ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$ (en kon) att $x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2$, dvs att $x^2 + y^2 = 1/2$. Kurvan γ består alltså av alla (x, y, z) sådana att $x^2 + y^2 = 1/2$ och $z = \sqrt{1/2}$. Den kan parametreras som $\{x = \cos t/\sqrt{2}, y = \sin t/\sqrt{2}, z = \sqrt{1/2}\}$, $t \in [0, 2\pi]$. Om vi insätter denna parametrering in kurvintegralen får vi

$$\int_{\gamma} y^6 dx + x^3 dy + (x^2 z^2 + y^2 z^2) dz = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin^7 t}{8\sqrt{2}} + \frac{\cos^4 t}{4} \right) dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt = \frac{3\pi}{16}.$$

För att använda Stokes sats där är enklast att införa cirkelskivan Y för vilken $x^2 + y^2 \leq 1/2$, $z = 1/2$. Dess uppenbara parametrering är $x = u, y = v, z = \sqrt{1/2}$, $u^2 + v^2 \leq 1/2$. Ytnormalen till Y är den konstanta vektorn $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Med dessa beteckningar får vi att

$$\int_{\gamma} y^6 dx + x^3 dy + (x^2 z^2 + y^2 z^2) dz =$$

(enligt Stokes sats)

$$\begin{aligned}
&= \iint_Y (\operatorname{rot}(y^6, x^3, x^2 z^2 + y^2 z^2)) \cdot \mathbf{N} \, dS = \iint_Y (2yz^2, -2xz^2, 3x^2 - 6y^5) \cdot \mathbf{N} \, dS = \\
&\quad (\text{enligt den införda parametriseringen av } Y) \\
&\quad = \iint_{u^2+v^2 \leq 1/2} (3u^2 - 6v^5) \, dudv = \\
&\quad (\text{eftersom integrationsområdet } u^2 + v^2 \leq 1/2 \text{ för varje fixt } u \text{ är} \\
&\quad \text{symmetriskt kring 0 i } v, \text{ och eftersom funktionen } 6v^5 \text{ är udda i } v) \\
&\quad = 3 \iint_{u^2+v^2 \leq 1/2} u^2 \, dudv = \\
&\quad (\text{inför polära koordinater } u = r \cos \theta / \sqrt{2}, v = r \sin \theta / \sqrt{2}) \\
&= 3 \iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} \frac{r^3 \cos^2 \theta}{4} \, dr d\theta = \frac{3}{4} \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

Problem 4. Visa att kurvintegralen $\int_\gamma (yz + y + z) \, dx + (xz + x + y) \, dy + (xy + x + y) \, dz$ är oberoende av vägen för kurvor γ i \mathbf{R}^3 . Bestäm också kurvintegralens värde om γ är kurvan

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{1-3t}{1+t^4}, \quad z = \frac{1-t^2}{1+t^6}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Vi använder teorin för kurvintegraler och visar att den givna kurvintegralen är oberoende av vägen för kurvor γ i \mathbf{R}^3 genom att visa att det finns en potentialfunktion på \mathbf{R}^3 till det vektorfält som kurvintegralens integrand definierar. Dvs vi visar att det finns en funktion φ sådan att

$$\begin{cases} \varphi'_x(x, y, z) = yz + y + z \\ \varphi'_y(x, y, z) = xz + x + z \\ \varphi'_z(x, y, z) = yz + x + y \end{cases}, \quad \text{för alla } (x, y, z) \in \mathbf{R}^3. \quad (1)$$

Första ekvationen i (1) ger att

$$\varphi(x, y, z) = \int (yz + y + z) \, dx = xyz + xy + xz + \psi(y, z).$$

Detta insatt i andra ekvationen i (1) ger att

$$xz + x + \psi'_y(y, z) = xz + x + z,$$

som är uppfyllt om

$$\psi(y, z) = \int z \, dy = yz + \omega(z).$$

De båda första ekvationerna i (1) är alltså uppfyllda om

$$\varphi(x, y, z) = xyz + xy + xz + \omega(z).$$

Detta insatt i tredje ekvationen i (1) ger att

$$xy + x + \omega'(z) = xy + x + y,$$

som är uppfyllt om

$$\omega(z) = \int y \, dz = yz + (\text{konstant}).$$

Funktionen

$$\varphi(x, y, z) = xyz + xy + xz + yz$$

är alltså en funktion som uppfyller alla tre ekvationerna i (1). Den givna kurvintegralen är således oberoende av vägen för kurvor γ i \mathbf{R}^3 . För den erhållna potentialfunktionen φ gäller dessutom enligt teorin för kurvintegraler att

$$\int_\gamma (yz + y + z) \, dx + (xz + x + z) \, dy + (xy + x + y) \, dz =$$

$$= \varphi(\gamma\text{:s slutpunkt}) - \varphi(\gamma\text{:s startpunkt}).$$

Den givna kurvan γ startar i punkten $(0, 1, 1)$ och slutar i punkten $(1, -1, 0)$. Kurvintegralens värde för denna kurva γ är således

$$\varphi(1, -1, 0) - \varphi(0, 1, 1) = -1 - 1 = -2.$$

Problem 5. Vilka av serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

är konvergenta? Motivera svaret.

Lösning. Eftersom $\sum_{n=1}^N (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{N} \rightarrow \infty$ blir den första serien divergent. Å andra sidan ser man att

$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$

så jämförelse med den välkända konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ visar att problemets serie konvergerar.

Slutligen finner man att

$$(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} > 0$$

vilket gör $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ till en avtagande storhet. Leibnitz sats för alternerande serier säkerställer konvergensen för den sista av de tre serierna.

Problem 6. Bestäm konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} (n-2)x^n$. Bestäm den rationella funktion som på seriens konvergensintervall ger dess summa.

Lösning. Med hjälp av rotkriteriet ser man att konvergensradien är lika med 1. Eftersom $(n-2) = (n+1) - 3$ ser man att följande beräkning är giltig för all $|x| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-2)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \left(\frac{1}{1-x} \right)' - \frac{3}{1-x} = \frac{3x-2}{(1-x)^2}.$$