Lösningsförslag till tentament i Analys 4, 09-12-16

Problem 1. Beräkna volymen av kroppen begränsad av ytorna $z = x^2+y^2$, $z \geq 0$ och $|x| + |y| = 1$.

Lösning. Denna kropp har fyra gånger så stor volym som kroppen K som ges av $\{0 \leq z \leq x^2 + y^2\},\ x \geq 0, y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$. Man har

$$vol(K) = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} dy \left[\int_0^{x^2+y^2} dz\right]\right] = \int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} (x^2+y^2)dy\right] = 2\int_0^1 dx \left[\int_0^{1-x} x^2 dy\right].$$

Vidare, $vol(K) = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}$.

Svar. $4 * \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$.

Problem 2. Låt den massiva kroppen K uppstå som skärninen mellan de två områden $x^2 + y^2 \leq z$ och $0 \leq z \leq 1$. Beräkna flödet ut ur ∂K för vektorfältet

$$\mathbf{F} = (x, y, z^2).$$

Skärningskroppen K ges utav $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Enligt divergenssatsen ges flödet utav

$$\iint_{\partial K} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F} dxdydz = \iiint_K (1 + 1 + 2z)dxdydz.$$

Trippelintegralen kan beräknas med upprepad integration som

$$2\int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2\leq z} (1+z)dxdy\right) dz =$$

$$= 2\int_0^1 \pi(1+z)zdz = 2\pi\int_0^1 z(1+z)dz =$$

$$= 2\pi\left[\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5\pi}{3}.$$

Problem 3. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma y^6dx + x^3dy + (x^2z^2 + y^2z^2)dz$ direkt och m.h.a. Stokes sats, där γ är skärningskurvan mellan ytorna $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ och $x^2 + y^2 = z^2$, och γ:s omloppsriktning är sådan att γ:s projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning.

Vi beräknar kurvintegralen direkt och genom att använda Stokes sats. Sambandet $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ (en halvklotyta) ger insatt i ekvationen $x^2 + y^2 = z^2$ (en kon) att $x^2 + y^2 = 1 - x^2 - y^2$, dvs att $x^2 + y^2 = 1/2$. Kurvan γ består alltså av alla (x, y, z) sådana att $x^2 + y^2 = 1/2$ och $z = \sqrt{1/2}$. Den kan parametriseras som $\{x = \cos t/\sqrt{2},\ y = \sin t/\sqrt{2},\ z = \sqrt{1/2}\},\quad t \in [0, 2\pi]$. Om vi insätter denna parametrisering in kurvintegralen får vi

$$\int_\gamma y^6dx + x^3dy + (x^2z^2+y^2z^2)dz = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sin^7 t}{8\sqrt{2}} + \frac{\cos^4 t}{4}\right)dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^4 tdt = \frac{3\pi}{16}.$$

För att använda Stokes sats där är enklast att införa cirkelskivan Y för vilken $x^2 + y^2 \leq 1/2,\ z = 1/2$. Dess uppenbara parametrisering är r $x = u,\ y = v,\ z = \sqrt{1/2},\ u^2 + v^2 \leq 1/2$. Ytnormalen till Y är den konstanta vektorn $\mathbf{N} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Med dessa beteckningar får vi att

$$\int_\gamma y^6\, dx + x^3\, dy + (x^2z^2 + y^2z^2)\, dz =$$

(enligt Stokes sats)

$$= \iint_Y (\mathrm{rot}(y^6, x^3, x^2z^2 + y^2z^2))\cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_Y (2yz^2, -2xz^2, 3x^2 - 6y^5)\cdot \mathbf{N}\, dS =$$

(enligt den införda parametriseringen av Y)

$$= \iint_{u^2+v^2\le 1/2} (3u^2 - 6v^5)\, dudv =$$

(eftersom integrationsområdet $u^2 + v^2 \le 1/2$ för varje fixt u är symmetriskt kring 0 i v, och eftersom funktionen $6v^5$ är udda i v)

$$= 3 \iint_{u^2+v^2\le 1/2} u^2\, dudv =$$

(inför polära koordinater $u = r\cos\theta/\sqrt{2},\ v = r\sin\theta/\sqrt{2}$)

$$= 3 \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} \frac{r^3\cos^2\theta}{4}\, drd\theta = \frac{3}{4}\int_0^1 r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \frac{3\pi}{16}.$$

Problem 4. Visa att kurvintegralen $\int_\gamma (yz + y + z)\, dx + (xz + x + y)\, dy + (xy + x + y)\, dz$ är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$. Bestäm också kurvintegralens värde om γ är kurvan

$$x = \frac{2t}{1+t^2},\quad y = \frac{1-3t}{1+t^4},\quad z = \frac{1-t^2}{1+t^6},\quad 0 \le t \le 1.$$

Vi använder teorin för kurvintegraler och visar att den givna kurvintegralen är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$ genom att visa att det finns en potentialfunktion på $\mathbf{R}^3$ till det vektorfält som kurvintegralens integrand definierar. Dvs vi visar att det finns en funktion φ sådan att

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi'_x(x,y,z) & = & yz + y + z \\ \varphi'_y(x,y,z) & = & xz + x + z \\ \varphi'_z(x,y,z) & = & xy + x + y \end{array}\right., \quad \text{för alla } (x,y,z) \in \mathbf{R}^3. \tag{1}$$

Första ekvationen i (1) ger att

$$\varphi(x,y,z) = \int (yz + y + z)\, dx = xyz + xy + xz + \psi(y,z).$$

Detta insatt i andra ekvationen i (1) ger att

$$xz + x + \psi'_y(y,z) = xz + x + z,$$

som är uppfyllt om

$$\psi(y,z) = \int z\, dy = yz + \omega(z).$$

De båda första ekvationerna i (1) är alltså uppfyllda om

$$\varphi(x,y,z) = xyz + xy + xz + \omega(z).$$

Detta insatt i tredje ekvationen i (1) ger att

$$xy + x + \omega'(z) = xy + x + y,$$

som är uppfyllt om

$$\omega(z) = \int y\, dz = yz + (\text{konstant}).$$

Funktionen

$$\varphi(x,y,z) = xyz + xy + xz + yz$$

är alltså en funktion som uppfyller alla tre ekvationerna i (1). Den givna kurvintegralen är således oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$. För den erhållna potentialfunktionen φ gäller dessutom enligt teorin för kurvintegraler att

$$\int_\gamma (yz + y + z)\, dx + (xz + x + z)\, dy + (xy + x + y)\, dz =$$

$$= \varphi(\gamma\text{:s slutpunkt}) - \varphi(\gamma\text{:s startpunkt}).$$

Den givna kurvan γ startar i punkten $(0, 1, 1)$ och slutar i punkten $(1, -1, 0)$. Kurvintegralens värde för denna kurva γ är således

$$\varphi(1, -1, 0) - \varphi(0, 1, 1) = -1 - 1 = -2.$$

Problem 5. Vilka av serierna

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

är konvergenta? Motivera svaret.

Lösning. Eftersom $\sum_{n=1}^{N} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \sqrt{N} \to \infty$ blir den första serien divergent. Å andra sidan ser man att

$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$

så jämförelse med den välkänt konvergenta serien $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ visar att problemets serie konvergerar.

Slutligen finner man att

$$(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} > 0$$

vilket gör $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ till en avtagande storhet. Leibnitz sats för alternerande serier säkerställer konvergensen för den sists av de tre serierna.

Problem 6. Bestäm konvergensradien för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} (n-2)x^n$. Bestäm den rationella funktion som på seriens konvergensintervall ger dess summa.

Lösning. Med hjälp av rotkriteriet ser man att konvergensradien är lika med 1. Eftersom $(n-2) = (n+1) - 3$ ser man att följande beräkning är giltig för all $|x| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n-2)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n - 3 \sum_{n=0} x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)' - \frac{3}{1-x} = \frac{3x-2}{(1-x)^2}.$$