MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Petter Brändén och Boris Shapiro

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
10-01-12

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Problemdel

1. Bestäm volymen av kroppen

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 5 \text{ och } x^2 + y^2 \leq z - 1\}.$$

5 p

Lösning: För att bestämma skärningen av ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ och $x^2 + y^2 = z - 1$, sätt $r = x^2 + y^2$ och lös ut z ur båda ekvationerna. Vi får $5 - r^2 = (r^2 + 1)^2$, som har som enda positiva lösning $r = 1$. Projektionen av K i xy-planet är därför $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

$$\text{Vol}(K) = \iiint\limits_K dxdydz = \iint\limits_D \int_{x^2+y^2+1}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} dzdxdy \quad \text{(polära koordinater)}$$

$$= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{5 - r^2} - r^3 - rdr = 2\pi\Big[-1/3(5 - r^2)^{3/2} - r^4/4 - r^2/2\Big]_0^1 = (20\sqrt{5} - 41)\pi/6$$

2. Betrakta fältet

$$\mathbf{F} = (P, Q) = \left(\frac{3x^2y^5}{x^6 + y^{10}}, \frac{-5x^3y^4}{x^6 + y^{10}}\right), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

a) Visa att $\mathbf{F}$ är oberoende av vägen i varje enkelt sammanhängande område som ej innehåller origo;

b) Finn en potential till $\mathbf{F}$ i området $\Omega = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, dvs Ω är xy-planet med icke-negativa delen av x-axeln borttagen. *Tips: Notera att*

$$P = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{y^5}\right)}{1 + \left(\frac{x^3}{y^5}\right)^2}, \qquad \text{då } y \neq 0;$$

c) Beräkna

$$\int_\gamma Pdx + Qdy,$$

där γ är kurvan med parametrisering $\mathbf{r}(t) = \Big(t^2 - (3 - t^2)(1 - t), t\Big)$, $-\sqrt{3} \leq t \leq 1$.

5 p

Lösning: Derivering ger att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{15x^2y^4(x^6 - y^{10})}{(x^6 + y^{10})^2},$$

så oberoende av vägen följer. Vi ser också att $\arctan(x^3/y^5) + C$, där C är en konstant, är en potential i områden som undviker $y = 0$. Då vi närmar oss $y = 0$ från tredje kvadranten närmar sig $\arctan(x^3/y^5)$ värdet $\pi/2$, och då vi närmar oss $y = 0$ från andra kvadranten går $\arctan(x^3/y^5)$ mot $-\pi/2$. Därför är

$$U(x,y) = \begin{cases} \arctan(x^3/y^5), & \text{om } y < 0, \\ \arctan(x^3/y^5) - \pi, & \text{om } y > 0, \\ \pi/2, & \text{om } y = 0 \end{cases}$$

en potential i Ω.
Kurvan γ går från $(3, -\sqrt{3})$, korsar först y-axeln, sedan x-axeln följt av y-axeln igen och hamnar slutligen i $(1,1)$. Därför ges kurvintegralen av

$$U(1,1) - U(3,-\sqrt{3}) = \arctan(1) - \pi - \arctan(-\sqrt{3}) = \pi/4 - \pi + \pi/3 = -5\pi/12.$$

3. Låt ytan $Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25, z \geq 4\}$ vara orienterad så att normalen, $\mathbf{N}$, har positiv z-koordinat. Beräkna

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS, \qquad \text{där } \mathbf{F} = (zx^3, zy^3 + x^5, y^2).$$

5 p

Lösning: Lägg till botten $Y_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 \leq 9, z = 4\}$, med normal, $\mathbf{N}$, som pekar i negativ z-led. Gauss sats ger

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) dxdydz - \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS,$$

där $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 25, z \geq 4\}$.

$$\iiint_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) dxdydz = 3 \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (x^2 + y^2) \left(\int_4^{\sqrt{25-x^2-y^2}} z dz \right) dxdy$$

$$= 3\pi \int_0^3 r^3(25 - r^2) - 16r^3 dr = 3\pi \Big[9r^4/4 - r^6/6 \Big]_0^3 = 3^6\pi/4$$

En parametrisering av Y_1 är $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,4)$, $(x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$, så

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} \mathbf{F} \cdot \pm \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y dxdy = \iint_{x^2+y^2 \leq 9} (?, ?, y^2) \cdot (0,0,-1) dxdy$$

$$= -\iint_{x^2+y^2 \leq 9} y^2 dxdy = -1/2 \iint_{x^2+y^2 \leq 9} x^2 + y^2 dxdy = -\pi \Big[r^4/4 \Big]_0^3 = -3^4\pi/4.$$

Vi får

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = 3^6\pi/4 + 3^4\pi/4 = 5 \cdot 3^4\pi/2 = 405\pi/2$$

4. Låt γ vara kurvan

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z^2 + 3x^2 = 4 \text{ och } z \geq 0\},$$

orienterad moturs betraktad från punkten $(0,0,10^9)$. Beräkna

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_\gamma (3x \sin(yz) + y^3) dx + xz^2 dy + z \sin(yz) dz.$$

5 p

Lösning: Projektionen av kurvan i xy-planet ges av $4x^2 + y^2 = 4$. Kurvan γ är alltså randen till ytan

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D : z = \sqrt{4 - 3x^2}\},$$

orienterad så att normalen har positiv z-koordinat och där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y/2)^2 \leq 1\}$. Låt $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z)$, där $z = \sqrt{4 - 3x^2}$ och $(x, y) \in D$ vara en parametrisering av Y. Notera att $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-z'_x, -z'_y, 1) = (3x/z, 0, 1)$. Av Stokes sats följer nu

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_Y \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} dS \\
&= \iint_D (z^2 \cos(yz) - 2xz, ?, z^2 - 3xz \cos(yz) - 3y^2) \cdot (3x/z, 0, 1) dxdy \\
&= \iint_D 4 - 9x^2 - 3y^2 dxdy \qquad \text{(variabelbyte: } u = x, v = y/2) \\
&= 2 \iint_{u^2+v^2 \leq 1} 4 - 9u^2 - 12v^2 dudv \qquad \left(\text{symmetri: } \int u^2 = \int v^2 = 1/2 \int (u^2 + v^2)\right) \\
&= 8 \iint_{u^2+v^2 \leq 1} dudv - 21/2 \iint_{u^2+v^2 \leq 1} u^2 + v^2 dudv \quad \text{(polära koordinater)} \\
&= 8\pi - 21/2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 dr d\theta = 11\pi/4
\end{aligned}$$

5. Bestäm för vilka $x \in \mathbb{R}$ följande potensserier konvergerar:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k!} x^k, \qquad \qquad \text{b)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-1/k}) x^k$$

5 p

Lösning: a). Vi har $\sqrt{(k+1)!}/\sqrt{k!} = \sqrt{(k+1)} \to \infty$ då $k \to \infty$. Av kvottestet följer att serien konvergerar endast för $x = 0$.
b). Vi har

$$\lim_{k \to \infty} (1 - e^{-1/k})^{1/k} = 1.$$

Enligt sats är konvergensradien 1. Det återstår att undersöka $x = 1$ och $x = -1$. Då

$$\lim_{k \to \infty} \frac{1 - e^{-1/k}}{1/k} = 1,$$

och $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ ger JFK II att $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-1/k})$ är divergent. Låt $a_k = 1 - e^{-1/k}$. Eftersom e^x är växande är a_k avtagande. Dessutom är $\lim_{k \to \infty} a_k = 1 - \lim_{k \to \infty} e^{-1/k} = 0$. Leibniz kriterium ger nu att $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-1/k})(-1)^k$ konvergerar. Konvergensintervallet är således $[-1, 1)$.

6. Avgör om följande generaliserade integral konvergerar eller divergerar:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

5 p

Lösning: Dela upp integralen i två:

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{x} dx \qquad \text{och} \qquad I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{x} dx.$$

Den kritiska punkten för första integralen är $x = 0$. Låt $f(x)$ vara integranden. Då är

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^{-1/2}} = 1,$$

så enligt JFK2 konvergerar I_1, eftersom $\int_0^1 x^{-1/2} dx < \infty$.
För den andra intergralen noterar vi att $|f(x)| \leq x^{-3/2}$ då $x \geq 1$. Eftersom $\int_1^\infty x^{-3/2} dx < \infty$ ger absolutkonvergens och JFK1 att även I_2 konvergerar. Således är integralen konvergent.