MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Boris Shapiro

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
100531

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_K z^2(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz,$$
där $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le z^2,\ \text{och } x^2+y^2+z^2 \le 1\}$. 5 p

2. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma x\sin(y^2)\,dx + (x^2 y\cos(y^2)+2x)\,dy,$$
där γ är ellipsen $x^2+4y^2=1$, genomlupen ett varv moturs. 5 p

3. Beräkna kurvintegralen
$$\int_{\Gamma_a} yze^{xyz}\,dx + zxe^{xyz}\,dy + xye^{xyz}\,dz$$
som funktion av a, där Γ_a är den orienterade kurvan definierad av $x=\cos t, y=\sin t, z=t$, $0 \le t \le a$. 5 p

4. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$
där $\mathbf{F} = (xy, y^2z, z)$, Y är ytan $\{x^2+y^2-z^2=1,\ -1 \le z \le 1\}$, och $\mathbf{N}$ är den enhetsnormal som pekar bort från z-axeln. 5 p

5. a) Summera serien
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{n-2}x^n,$$
samt ange dennas konvergensintervall. 2.5 p

   b) Lös ekvationen
$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{n-2}x^n = 1.$$
2.5 p

V.G.V.

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 5 p

7. Bevisa Cauchys rotkriterium för serier: Antag att $|a_k|^{1/k} \to A$ när $k \to \infty$. Om $0 \leq A < 1$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent, och om $1 < A$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. 5 p

Skrivningsåterlämning onsdagen den 2 juni kl 12.30 nära sal 14 hus 5, därefter hos vaktmästaren Reine Elfsö.