Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2010-05-31.

1.

De två ytorna $x^2+y^2=z^2$ och $x^2+y^2+z^2=1$ skär varandra då $x^2+y^2=1-x^2-y^2$, dvs för $x^2+y^2=\frac{1}{2}, z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Området består därför av två symmetriska delar som ger lika stor integral. Övergång till polära koordinater ger

$$\iiint_K z^2(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz =$$

$$= 2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(r\cos\theta)^2r^2r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi dr =$$

$$= 2\int_0^1 r^6\,dr\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta =$$

$$2\left[\frac{1}{7}r^7\right]_0^1 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\sin\theta d\theta =$$

$$= \left[\begin{array}{cc} t= & \cos\theta \\ dt= & -\sin\theta d\theta\end{array}\right] = \frac{4\pi}{7}\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}t^2(-dt) =$$

$$= \frac{4\pi}{7}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 t^2\,dt = \frac{4\pi}{7}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{\pi}{21}\left(4-\sqrt{2}\right).$$

2.

Låt $D=\{(x,y):\, x^2+4y^2\le 1\}$. Greens formel ger

$$\int_\gamma x\sin(y^2)\,dx+(x^2y\cos(y^2)+2x)\,dy =$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2y\cos(y^2)+2x)-\frac{\partial}{\partial y}(x\sin(y^2))\right)dxdy$$

$$= 2\iint_D dxdy = 2\cdot\pi\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\pi,$$

enligt formeln $A=\pi ab$ för arean av en ellips.

3.

En enkel räkning visar att fältet är rotationsfritt, dvs ett potentialfält. Vi observerar att

$$yze^{xyz}\,dx+zxe^{xyz}\,dy+xye^{xyz}\,dz = d(e^{xyz}),$$

dvs $U(x,y,z)=e^{xyz}$ är en potential. Vi får

$$\int_{\Gamma_a} yze^{xyz}\,dx+zxe^{xyz}\,dy+xye^{xyz}\,dz =$$

$$= \left[e^{x(t)y(t)z(t)}\right]_{t=0}^{t=a} = e^{a\cos a\sin a}-1.$$

4.

Genom att till Y lägga locket $Y_1=\{x^2+y^2\le 2,\ z=1\}$ (med normalen uppåt) och botten $Y_{-1}=\{x^2+y^2\le 2,\ z=-1\}$ (med normalen neråt) får vi en sluten yta på vilken vi kan tillämpa Gauss sats:

$$\iint_Y\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{Y_{-1}}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS =$$

$$\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdydz.$$

$$\iint_{Y_1} = \iint_{x^2+y^2\le 2}(xy,y^2,1)\cdot(0,0,1)\,dxdy =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 2}1\,dxdy = 2\pi.$$

$$\iint_{Y_{-1}} = \iint_{x^2+y^2\le 2}(xy,-y^2,-1)\cdot(0,0,-1)\,dxdy =$$

$$\iint_{x^2+y^2\le 2}1\,dxdy = 2\pi.$$

$$\iiint_K\mathrm{div}\mathbf{F} = \iiint_K(y+2yz+1)\,dxdydz =$$

$$= \int_{-1}^1\left(\iint_{x^2+y^2\le 1+z^2}(y+2yz+1)\,dxdy\right)dz$$

De två termerna y och yz ger p g a symmetri 0 då vi integrerar först m a p y i den inre integralen. Den tredje termen 1 ger vid integration m a p x,y, arean av en cirkel med radie $\sqrt{1+z^2}$. Vi får

$$= \int_{-1}^1\pi(1+z^2)\,dz = \left[z+\frac{1}{3}z^3\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}\pi.$$

Sammanfattningsvis:

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \frac{8}{3}\pi - 2\pi - 2\pi = -\frac{4}{3}\pi.$$

5.

a) Sätt $z = 3x$. Vi får

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{n-2}x^n = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n =$$

$$\frac{1}{9}D\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right) = \frac{1}{9}D\left(\frac{z}{1-z}\right) =$$

$$\frac{1}{9(1-z)^2} = \frac{1}{9(1-3x)^2}.$$

Konvergensradien ges av

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)3^{n-2}}{(n+2)3^{n-1}} = \frac{1}{3}.$$

I ändpunkterna $x = \frac{1}{3}$ och $x = -\frac{1}{3}$ fås serierna

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{n-2}\frac{1}{3}^n$$

och

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)3^{n-2}-\frac{1}{3}^n$$

som båda är divergenta eftersom termerna inte går mot 0. Konvergensintervallet blir därför $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$.

b) Ekvationen

$$\frac{1}{9(1-3x)^2} = 1$$

har lösningarna $x = \frac{2}{9}$ och $x = \frac{4}{9}$. Roten $x = \frac{4}{9}$ förkastas eftersom den ligger utanför konvergensintervallet till serien. Svaret är alltså $x = \frac{2}{9}$.

För svaren till frågorna 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.