MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Boris Shapiro

Tentamensskrivning i
Matematisk analys 4
100819

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna trippelintegralen
$$\iiint_K (1+z^2)\,dxdydz,$$
där $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq \cos z, \quad -\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}\}$. 5 p

2. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2},$$
där γ är kurvan $y = x^2+2x-4$, och integrationen går från $(1,-1)$ till $(2,4)$. 5 p

3. Beräkna flödesintegralen
$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$$
där $\mathbf{F} = (x\sin y, x+\cos y, z-1)$, Y är den del av ellipsoiden $\{x^2+2y^2+4z^2=1\}$ där $z \geq 0$ (med uppåtriktad normal). 5 p

4. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$$
där $\mathbf{F} = (ye^x, e^x+x^3, z^5)$ och γ är skärninngskurvan mellan cylindern $x^2+y^2=1$ och ytan $z = 2xy$, orienterad på så sätt att den ortogonala projektionen på $xy-$planet är orienterad moturs. 5 p

5. a) Avgör om den generaliserade integralen
$$\int_0^\infty \frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}dx$$
konvergerar eller ej. 2.5 p

   b) Summera serien
$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k 2^k x^k}{k(k+2)},$$
samt ange seriens konvergensintervall. 2.5 p

V.G.V.

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 5 p

7. Bevisa Cauchys rotkriterium för serier: Antag att $|a_k|^{1/k} \to A$ när $k \to \infty$. Om $0 \leq A < 1$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent, och om $1 < A$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. 5 p

Skrivningsåterlämning måndagen den 30 augusti kl 12.00 i mitt rum 210 hus 6, därefter hos vaktmästaren Reine Elfsö.