Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2003-01-16.

1.

$$\iiint_K (1+z^2)\,dxdydz =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left((1+z^2) \iint_{x^2+y^2\le \cos z} dxdy \right) dz =$$

(den inre integralen kan beräknas som arean av en cirkel med radie $\sqrt{\cos z}$)

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+z^2)\pi \cos z\,dz =$$

$$= \pi \left[(1+z^2)\sin z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2z\sin z\,dz =$$

$$\pi(2+\frac{1}{2}\pi^2) - \pi\left[2z(-\cos z)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(-\cos z)\,dz$$

$$= \pi(2+\frac{1}{2}\pi^2) - 2\pi\left[\sin z\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi^3 - 2\pi.$$

2.

Eftersom

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x^5 - 2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$$

så kan integrationsvägen bytas ut mot t ex de tre linjestyckena från $(1,-1)$ till $(1,0)$ (γ_1), $(1,0)$ till $(2,0)$ (γ_2) och $(2,0)$ till $(2,4)$ (γ_3). Vi får

$$\int_\gamma \frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} = I_1 + I_2 + I_3.$$

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2} = \int_{-1}^{0} \frac{-dy}{1+y^2} =$$

$$= \left[-\arctan y\right]_{-1}^{0} = -\arctan 0 + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2} = \int_1^2 0\,dx = 0.$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4+y^2} = \int_0^4 \frac{-4dy}{16+y^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{rl} y = & 4t \\ dy = & 4dt \end{array}\right] = \int_0^1 \frac{-16dt}{16+16t^2} = \int_0^1 \frac{-dt}{1+t^2} =$$

$$= \left[-\arctan t\right]_0^1 = -\arctan 1 + \arctan(0) = -\frac{\pi}{4}.$$

Sammanfattningsvis:

$$\int_\gamma = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{\pi}{4} + 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

3.

Genom att till Y lägga botten $Y_0 = \{x^2+2y^2 \le 1,\ z=0\}$ (med normalen neråt) får vi en sluten yta på vilken vi kan tillämpa Gauss sats:

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dxdydz.$$

$$I_0 = \iint_{Y_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS =$$

$$= \iint_{x^2+2y^2\le 1} (x\sin y, x+\cos y, -1))\cdot(0,0,-1)\,dxdy$$

$$= \iint_{x^2+2y^2\le 1} 1\,dxdy = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$I_1 = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F} = \iiint_K (\sin y - \sin y + 1)\,dxdydz$$

$$= \iiint_K 1\,dxdydz = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{6},$$

enligt formeln $V = \frac{4\pi}{3}abc$ för volymen av en ellipsoid med halvaxlarna a, b och c. Alltså:

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = I_1 - I_0 = -\frac{\sqrt{2}\pi}{3}.$$

4.

Med hjälp av Stokes sats kan vi skriva

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \mathbf{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS,$$

där Y är den del av grafen $z = f(x,y) = 2xy$ som ligger innanför cylindern $x^2 + y^2 \leq 1$, och $\mathbf{N}$ är den uppåtriktade normalen.

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^x & e^x + x^3 & z^5 \end{vmatrix} = (0,0,3x^2),$$

vilket ger

$$\iint_Y \mathbf{rotF} \cdot \mathbf{N}\, dS, =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} (0,0,3x^2)\cdot(-f'_x, -f'_y, 1)\, dxdy =$$

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} 3x^2\, dxdy = 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)^2 r dr d\theta$$

$$3\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = 3\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

5.

a) Integralen är generaliserad i 0 och ∞. Vi undersöker integralerna

$$\int_0^1 \frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}dx \quad \text{och} \quad \int_1^\infty \frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}dx$$

separat. Den första integralen har positiv integrand och vi kan därför använda jämförelsekriterium II med $f(x) = \frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}$ och $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin x + O(x^3)}{x} = 1.$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2.$$

Det följer att den första integralen är konvergent. Eftersom

$$\int_1^\infty \left|\frac{e^{\sin x}-1}{x\sqrt{x}}\right| dx \leq \int_1^\infty \left|\frac{e-1}{x\sqrt{x}}\right| dx =$$

$$= (e-1)\left[\frac{-2}{\sqrt{x}}\right]_1^\infty = 2e-2,$$

följer att den andra integralen är absolutkonvergens och alltså är även konvergent.

Slutsats: Integralen är konvergent.

b) Konvergensradien ges av

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{2^k}{k(k+1)}}{\frac{2^{k+1}}{(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{2}.$$

I ändpunkterna $x = \frac{1}{2}$ och $x = -\frac{1}{2}$ fås serierna

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{k(k+2)} \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+2)}$$

som båda är (absolut-)konvergenta. Konvergensintervallet blir därför $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Sätt nu $z = -2x$. Vi får

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k 2^k x^k}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k(k+2)} =$$

$$\sum_{k=1}^\infty \int_0^z \left(\frac{t^{k-1}}{k+2}\right) dt = \int_0^z \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k-1}}{k+2}\right) dt =$$

$$\int_0^z \left(\frac{1}{t^3}\sum_{k=1}^\infty \frac{t^{k+2}}{k+2}\right) dt = \int_0^z \left(\frac{1}{t^3}\sum_{k=1}^\infty \int_0^t s^{k+1}\, ds\right) dt$$

$$= \int_0^z \left(\frac{1}{t^3}\int_0^t \left(\sum_{k=1}^\infty s^{k+1}\right) ds\right) dt =$$

$$= \int_0^z \left(\frac{1}{t^3}\int_0^t \frac{s^2}{1-s} ds\right) dt =$$

$$= \int_0^z \left(\frac{1}{t^3}\left[-\frac{1}{2}s^2 - s - \ln(1-s)\right]_0^t\right) dt =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^z \left(-\frac{1}{2t} - \frac{1}{t^2} - \frac{\ln(1-t)}{t^3}\right) dt =$$

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\left[-\frac{\ln|t|}{2} + \frac{1}{t} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t} + \ln|t| - \ln(1-t)\right)\right.$$

(Partialintegration och partialbråksuppdelning.)

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\ln(1-t)}{t^2}\right]_\epsilon^z = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\frac{t + (1-t^2)\ln(1-t)}{2t^2}\right]_\epsilon^z =$$

$$\frac{z + \frac{1}{2}z^2 + (1-z^2)\ln(1-z)}{2z^2} =$$

$$= \frac{-2x + 2x^2 + (1-4x^2)\ln(1+2x)}{8x^2}.$$

Observera att resultatet gäller även i origo (om vi tolkar funktionen som gränsvärdet då $x \to 0$).

För svaren till frågorna 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.