MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys IV
101222

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Bestäm för var och en av potensserierna

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(n^2)} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n \quad \text{och} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

de reella tal x för vilka potensserien konvergerar. 6 p

b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y'' + 2x^2y' + 6xy = 0$ med bivillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. Den erhållna lösningen $y(x)$ är en viss elementär funktion. Vilken? 6 p

2. Beräkna volymen av området $z \geq x^2 + 2y^2$, $z \leq 1 + 2x + 4y$. 8 p

3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$ där Y är den del av ytan $(x+z)^2 + (y+2z)^2 = z^2$ där $1 \leq z \leq 2$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (xz^2, -x^2y, x^2z - x^2)$. 8 p

4. Beräkna de båda kurvintegralerna

$$\int_\gamma -y^4\,dx + x^4\,dy \quad \text{och} \quad \int_\gamma -\frac{y}{x^2+3y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\,dy$$

där γ är kurvan $x^4 + y^4 = 2$, $y \geq -1$, från punkten $(1,-1)$ till punkten $(-1,-1)$. 8 p

5. Betrakta kurvintegralen

$$\int_\gamma -xyz\,dx + y\,dy + \left(x^2y + \frac{4}{3}y^3 - y\right) dz$$

för kurvor γ. Visa att kurvintegralen inte är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$. Visa att kurvintegralen är oberoende av vägen för kurvor γ på klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ förslagsvis genom att visa att kurvintegralen är 0 för varje enkel sluten kurva γ på klotytan. Beräkna också kurvintegralens värde då γ är en kurva på klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ från punkten $\frac{1}{3}(1,2,2)$ på klotytan till punkten $\frac{1}{3}(2,1,-2)$ på klotytan. 8 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa Greens formel för områden i planet med *en* under- och *en* överdel och *en* vänster- och *en* högerdel. Skissera sedan hur Greens formel kan fås för mera allmänna områden i planet. 12 p

7. Låt $\mathbf{F} = (P, Q)$ vara ett C^1-vektorfält definierat i en enkelt sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $P_2' = Q_1'$ i Ω. Ge även ett exempel som visar att denna ekvivalens inte gäller om enkelt sammanhängande byts mot bågvis sammanhängande. 12 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning to 23/12 kl 9.00-9.15 i sal 36 hus 5, därefter i rum 208 hus 6.