Lösningar till Matematisk analys 4, 101222

1. a) Alla de givna serierna är uppenbarligen konvergenta om $x = 0$. Sätt

$$a_n = 2^{(n^2)} x^n, \quad b_n = \frac{n}{n^2+1} x^n \quad \text{och} \quad c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

För $x \neq 0$ har vi att

$$|a_n|^{1/n} = 2^n |x| \to \infty \quad \text{då} \quad n \to \infty,$$

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} |x|^{n+1} \frac{n^2+1}{n} \frac{1}{|x|^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}} |x| \to |x| \quad \text{då} \quad n \to \infty,$$

och

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{\big((n+1)!\big)^2}{\big((2n+2)!\big)} |x|^{n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{1}{|x|^n} = \frac{n+1}{2(2n+1)} |x| = \frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(2+\frac{1}{n}\right)} |x| \to \frac{|x|}{4} \quad \text{då} \quad n \to \infty.$$

Enligt Cauchys rotkriterium är således serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent då $x \neq 0$, och enligt d'Alemberts kvotkriterium är för $x \neq 0$ serien $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent då $|x| < 1$ och divergent då $|x| > 1$ och serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent $|x| < 4$ och divergent då $|x| > 4$.

För $x = 1$ är

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

som är divergent enligt jämförelsekriterium för positiva serier eftersom

$$\frac{n}{n^2+1} \Big/ \frac{1}{n} = \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1 \quad \text{då} \quad n \to \infty$$

och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är en positiv divergent standardserie. För $x = -1$ är

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1},$$

som är en alternerande serie. Sätt $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Då är $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, så $f'(x) < 0$ om $x > 1$. Funktionen $\frac{x}{x^2+1}$ är alltså avtagande i $x \geq 1$, och eftersom även $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ så är serien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$ konvergent enligt Leibniz kriterium för alternerande serier.

För $|x| = 4$ är

$$|c_n| = \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)} 2^{2n} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n)} > 1$$

för alla heltal $n \geq 1$, och alltså gäller för $|x| = 4$ inte att $c_n \to 0$ då $n \to \infty$. Serien $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ är således divergent om $|x| = 4$.

Sammanfattningsvis gäller för reella tal x följande: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent endast om $x = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ är konvergent precis om $-1 \leq x < 1$ och $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ är konvergent precis om $-4 < x < 4$.

b) I enlighet med problemtexten ansätter vi att

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \text{ och att } y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Insättning i givna differentialekvationen ger sedan att

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + 2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 6x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0. \tag{1}$$

Men

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1}}_{\text{Sätt } \ell+1=k-2} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\ell=-1}^{\infty} (\ell+3)(\ell+2)a_{\ell+3} x^{\ell+1}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} = \sum_{k=-1}^{\infty} (k+3)(k+2)a_{k+3}x^{k+1} = 2a_2 + \sum_{k=0}^{\infty}(k+3)(k+2)a_{k+3}x^{k+1},$$

och

$$2x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 6x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2k a_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} 6 a_k x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+3) a_k x^{k+1}.$$

Sambandet (1) kan därför skrivas

$$2a_2 + \ sum_{k=0}^{\infty} \big((k+3)(k+2)k a_{k+3} + 2(k+3)a_k\big) x^{k+1} = 0.$$

Vi får således att $a_2 = 0$ och att

$$(k+3)(k+2)a_{k+3} + 2(k+3)a_k = 0 \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots$$

och alltså att

$$a_2 = 0 \quad \text{samt} \quad a_{k+3} = -\frac{2}{k+2} a_k \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots \quad \text{och} \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots$$

samt $y(0) = 0$ och $y'(0) = 1$, får vi vidare att $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \ldots$ således att

$$a_{k+3} = -\frac{2}{k+2} a_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

samt

$$a_0 = a_2 = 0 \quad \text{och} \quad a_1 = 1.$$

Av $a_0 = 0$ och (2) följer att $a_0 = a_3 = a_6 = \cdots = 0$. Av $a_2 = 0$ och (2) följer att $a_2 = a_5 = a_8 = \cdots = 0$. Av $a_1 = 1$ och (2) följer att

$$a_4 = -\frac{2}{3} a_1 = -\frac{2}{3},$$

$$a_7 = -\frac{2}{6}\, a_4 = (-1)^2 \, \frac{2^2}{3 \cdot 6} = (-1)^2 \, \frac{2^2}{3^2 \cdot 2!}$$

$$a_{10} = -\frac{2}{9}\,a_7 = (-1)^3\,\frac{2^3}{3^3 \cdot 3!},$$

$$\vdots\,,$$

dvs att

$$a_{3k+1} = (-1)^k \frac{2^k}{3^k \cdot k!} \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \dots \,.$$

Notera här också att formeln för a_{3k+1} även stämmer för $k = 0$. Den sökta potensserielösningen är alltså

(3)
$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{3^k \cdot k!}\, x^{3k+1}.$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = (-1)^k \frac{2^k}{3^k \cdot k!}\, x^{3k+1}$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{2^{k+1}}{3^{k+1} \cdot (k+1)!}\, |x|^{3(k+1)+1} \cdot \frac{3^k \cdot k!}{2^k}\, \frac{1}{|x|^{3k+1}} = \frac{2}{3(k+1)} |x|^3 \to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (3) är absolutkonvergent för alla x. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent för alla x, och följaktligen är potensserielösningens konvergensradie ∞ (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen på hela räta linjen. Vi noterar sedan slutligen att eftersom

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{3^k \cdot k!}\, x^{3k+1} = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{2x^3}{3} \right)^k$$

och

$$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} u^k$$

så är den erhållna lösningen $y(x) = xe^{-2x^3/3}$.

2. Låt D beteckna det givna området $z \geq x^2 + 2y^2$, $z \leq 1 + 2x + 4y$, låt γ vara skärningskurvan mellan planet $z = 1 + 2x + 4y$ och paraboloiden $z = x^2 + 2y^2$, låt Γ vara projektionen av γ på xy-planet och låt E vara området innanför Γ i xy-planet. Då gäller (rita figur) att det givna området D är området bestående av alla (x, y, z) sådana att $(x, y) \in E$ och $x^2{+}2y^2 \leq z \leq 1{+}2x{+}4y$. Sambandet $z = 1{+}2x{+}4y$ från planets ekvation insatt i paraboloidens ekvation ger att $1 + 2x + 4y = x^2 + 2y^2$, vilket kan skrivas $(x+1)^2 + 2(y+1)^2 = 1$. Kurvan γ består alltså av alla (x, y, z) sådana att $(x+1)^2 + 2(y+1)^2 = 1$ och $z = 1 + 2x4y$. Kurvan Γ är alltså kurvan $(x+1)^2 + 2(y+1)^2 = 1$ i xy-planet, och E är alltså området $(x+1)^2 + 2(y+1)^2 \leq 1$ i xy-planet. Vi får att

$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D dx\,dy\,dz = \iint_E \left(\int_{x^2+2y^2}^{1+2x4y} dz \right) dx\,dy = \iint_E \left(\big[z\big]_{z=x^2+2y^2}^{z=1+2x+4y} \right) dx\,dy =$$

$$= \iint_E (1 + 2x + 4y - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy = \iint_E \big(4 - (x+1)^2 - 2(y+1)^2\big)\,dx\,dy =$$

(gör substitutionen $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}(y+1)$, dvs $x = u - 1$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}v - -1$,

substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.)

$$= \iint_{u^2+v^2\le 4} (4-u^2-v^2)\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| du\,dv = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{u^2+v^2\le 4} \left(4-u^2-v^2\right) du\,dv =$$

(inför polära koordinater $u = r\cos\theta$, $v = r\sin\theta$)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi}} (4-r^2) r\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\,\pi \int_0^2 \left(4r - r^3\right) dr =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi \left[2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^2 = 4\sqrt{2}\,\pi.$$

3. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 1$ där $(x+1)^2 + (y+2)^2 \le 1$, och låt Y_2 vara den del av planet $z = 2$ där $(x+2)^2 + (y+4)^2 \le 4$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1 och $\mathbf{N}_2$ den utåtriktade enhetsnormalen till Y_2, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$(4) \qquad \iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1\,dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz.$$

På ytan Y_1 är $\mathbf{F} = (x, -x^2y, 0)$ och $\mathbf{N}_1 = (0,0,-1)$. Dvs $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1 = 0$ på hela Y_1, och alltså är

$$(5) \qquad \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1\,dS = 0$$

En parametrisering av ytan Y_2 är $x = u$, $y = v$, $z = 2$, där $(u+2)^2+(v+4)^2 \le 4$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, 2)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v) = (0,0,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_2 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$(6) \qquad \iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2\,dS = \iint_Y (xz^2, -x^2y, x^2z - x^2)\cdot\mathbf{N}\,dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_2.)

$$= + \iint_{(u+2)^2+(v+4)^2\le 4} \big(u, -u^2v, u^2\big)\cdot(0,0,1)\;dudv = \iint_{(u+2)^2+(v+4)^2\le 4} u^2\;dudv =$$

(Gör substitutionen $s = u+2$, $t = v+4 \iff u = s-2$, $v = t-4$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = 1$, och $(u+2)^2 + (v+4)^2 \le 4$ övergår i $s^2+t^2 \le 4$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 2} (s-2)^2|1|\,dsdt = \iint_{s^2+t^2\le 2} \left(s^2 - 4s + 4\right)\,dsdt =$$

(Eftersom $2s$ är udda i s och området $s^2+t^2 \le 4$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 2} \left(s^2 + 4\right)\,dsdt =$$

(Eftersom området $s^2+t^2 \le 4$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \iint_{s^2+t^2\leq 2} \left(\frac{1}{2}(s^2+t^2)+4\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\leq r\leq 2\\ 0\leq\theta<2\pi}} \left(\frac{1}{2}r^2+4\right) r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^2 \left(\frac{1}{2}r^3+4r\right) dr = 2\pi\left[\frac{1}{8}r^4+2r^2\right]_0^2 = 20\pi.$$

Vidare är $\nabla\cdot\mathbf{F} = z^2$ och D är mängden $(x+z)^2+(y+2z)^2 \leq z^2$, $1\leq z\leq 2$, och vi får att

(7) $$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \iiint_D z^2\,dxdydz = \int_1^2 z^2\left(\iint_{(x+z)^2+(y+2z)^2\leq z^2} dxdy\right) dz.$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

(8) $$\iint_{(x+z)^2+(y+2z)^2\leq z^2} dxdy = \text{area}\big((x+z)^2+(y+2z)^2\leq z^2\big) = \pi\,z^2$$

Insättning av (8) i (7) ger att

(9) $$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \pi\int_1^2 z^4\,dz = \pi\left[\frac{1}{5}z^5\right]_1^2 = \frac{31\pi}{5}.$$

Av (4), (5) och (6) och (9) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{31\pi}{5} - 0 - 20\pi = -\frac{69\pi}{5}.$$

4. Vi börjar med kurvintegralen $\int_\gamma -y^4\,dx + x^4\,dy$.

Sätt $P(x,y) = -y^4$ och $Q(x,y) = x^4$. Vi använder Greens formel för att beräkna den givna kurvintegralen. Eftersom γ inte är en sluten kurva måste vi då först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Låt Γ vara räta linjen $y=-1$ från punkten $(-1,-1)$ till punkten $(1,-1)$, och låt D vara området $x^4+y^4\leq 2$, $y\geq -1$. Greens formel ger då att

$$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy + \int_\Gamma P\,dx+Q\,dy = \iint_D (Q_1'-P_2')\,dxdy.$$

Men $Q_1'-P_2' = 4x^3+4y^3$, och vi får att

(10) $$\int_\gamma P\,dx+Q\,dy = \iint_D (4x^3+4y^3)\,dxdy - \int_\Gamma P\,dx+Q\,dy.$$

En parametrisering av Γ är $x=t$, $y=-1$, $-1\leq t\leq 1$, och den ger att

(11) $$\int_\Gamma P\,dx+Q\,dy = -\int_{-1}^1 dt = -2.$$

Vidare har vi att

(12) $$\iint_D (4x^3+4y^3)\,dxdy = \iint_{x^4+y^4\leq 2,\, y\geq -1} (4x^3+4y^3)\,dxdy =$$

$$= \int_{-1}^{2^{1/4}} \left(\int_{-(2-y^4)^{1/4}}^{(2-y^4)^{1/4}} (4x^3+4y^3)\,dx\right) dy =$$

$$= \int_{-1}^{2^{1/4}} \left(\left[x^4 + 4xy^3 \right]_{x=-(2-y^4)^{1/4}}^{x=(2-y^4)^{1/4}} \right) dy = \int_{-1}^{2^{1/4}} 8y^3(2-y^4)^{1/4}\, dy = \left[-\frac{8}{5}(2-y^4)^{5/4} \right]_{-1}^{2^{1/4}} = \frac{8}{5}$$

Insättning av (11) och (12) i (10) ger att

$$\int_\gamma P\, dx + Q\, dy = \frac{8}{5} - (-2) = \frac{18}{5}.$$

Vi övergår nu till kurvintegralen

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2+3y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\, dy.$$

Sätt nu istället

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+3y^2} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+3y^2}.$$

Funktionerna P och Q är definierade i $(x,y) \neq (0,0)$. Derivering ger att $Q_1'(x,y) - P_2'(x,y) = 0$ i $(x,y) \neq (0,0)$. Sätt $D = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \leq 0\}$. Kurvan γ är då en kurva i D. Eftersom $Q_1' - P_2' = 0$ i D och D är en öppen, bågvis och enkelt sammanhängande delmängd av R^2 så är kurvintegralen

$$\int_\Gamma -\frac{y}{x^2+3y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\, dy.$$

oberoende av vägen för kurvor Γ i D. Låt σ vara ellipsbågen $x^2 + 3y^2 = 4$, $y \geq -1$, från punkten $(1,-1)$ till punkten $(-1,-1)$. Då är kurvan σ också en kurva i D, och alltså gäller att

$$(13) \qquad \int_\gamma -\frac{y}{x^2+3y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\, dy = \int_\sigma -\frac{y}{x^2+3y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\, dy.$$

Kurvintegralen längs σ kan enkelt beräknas genom att använda parametriseringen $x = 2\cos t$, $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t$, $-\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{4\pi}{3}$ av σ. Vi får att

$$(14) \qquad \int_\sigma -\frac{y}{x^2+3y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\, dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(-\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\sin t}{4}(-2\sin t) + \frac{2\cos t}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\cos t \right) dt =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{1}{\sqrt{3}}\, dt = \frac{5\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Av (13) och (14) följer att

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2+3y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\, dy = \frac{5\pi}{3\sqrt{3}}.$$

5. Sätt $\mathbf{F} = \left(-xyz, y, x^2y + \frac{4}{3}y^3 - y\right)$, så att den givna kurvintegralen är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$. Eftersom $\mathbf{R}^3$ är en öppen, bågvis och enkelt sammanhängande mängd är $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$ precis om $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i hela $\mathbf{R}^3$. (I en öppen bågvis men ej enkelt sammanhängande mängd är $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ i mängden ett nödvändigt men ej tillräckligt villkor för kurvintgralens oberoende av vägen.) Beräkning ger att

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_1, D_2, D_3) \times \left(-xyz, y, x^2y + \frac{4}{3}y^3 - y \right) = (x^2 + 4y^2 - 1, -3xy, xz) \neq (0,0,0),$$

och alltså är kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ inte oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$.

Vi visar nu att kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ är oberoende av vägen för kurvor γ på klotytan $x^2+y^2+z^2 = 1$. Låt γ vara en enkel sluten kurva på klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, låt Y vara den del av klotytan som γ omsluter och låt $\mathbf{N}$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till klotytan. Då är

$$(15) \qquad \int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \pm \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

enligt Stokes sats. Plus- respektive minustecknet gäller om γ har positiv respektive negativ orientering i förhållande till Y och $\mathbf{N}$. Gradienten av $x^2+y^2+z^2$, dvs vektorn $2(x,y,z)$, är en normalvektor till klotytan $x^2+y^2+z^2=1$ i en punkt (x,y,z) på klotytan. Denna normalvektor är utåtriktad och har längd 2 i varje punkt (x,y,z) på klotytan $x^2+y^2+z^2=1$. Dvs $\mathbf{N}=(x,y,z)$ i varje punkt (x,y,z) på klotytan. I varje punkt (x,y,z) på klotytan $x^2+y^2+z^2=1$ har vi alltså att

$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}=(x^2+4y^2-1,-3xy,xz)\cdot(x,y,z)=$$
$$=x^3+4xy^2-x-3xy^2+xz^2=x(x^2+y^2+z^2-1)=0$$

eftersom $x^2+y^2+z^2=1$ på klotytan. Tillsammans med (15) visar det att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$ för varje enkel sluten kurva γ på klotytan $x^2+y^2+z^2=1$, och alltså är kurvintegralen oberoende av vägen för kurvor γ på klotytan.

Vi beräknar nu värdet av kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ då γ är en kurva på klotytan $x^2+y^2+z^2=1$ från punkten $\frac{1}{3}(1,2,2)$ på klotytan till punkten $\frac{1}{3}(2,1,-2)$ på klotytan. Vilken sådan kurva γ vi väljer spelar ingen roll eftersom $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ enligt första delen av uppgiften har samma värde för varje sådan kurva γ. Planet $z=-2x+2y$ är planet genom punkterna $(0,0,0)$, $\frac{1}{3}(1,2,2)$ och $\frac{1}{3}(2,1,-2)$. Låt σ vara den mindre av de två delar av detta plan som begränsas av skärningen mellen planet och klotytan $x^2+y^2+z^2=1$ samt linjestyckena från origo till punkterna $\frac{1}{3}(1,2,2)$ och $\frac{1}{3}(2,1,-2)$ på klotytan. Värdet av kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ då γ är en kurva på klotytan $x^2+y^2+z^2=1$ från punkten $\frac{1}{3}(1,2,2)$ på klotytan till punkten $\frac{1}{3}(2,1,-2)$ på klotytan kan fås genom att tillämpa Stokes sats på σ. Vi kan göra på följande sätt. Låt γ_1 vara räta linjen origo till punkten $\frac{1}{3}(2,1,-2)$ på klotytan, låt γ_2 vara räta linjen origo till punkten $\frac{1}{3}(1,2,2)$ på klotytan, och låt γ vara kortaste vägen från punkten $\frac{1}{3}(1,2,2)$ till punkten $\frac{1}{3}(2,1,-2)$ längs skärningskurvan mellan planet $z=-2x+2y$ och klotytan $x^2+y^2+z^2=1$. Då är $\gamma_1\cup(-\gamma)\cup(-\gamma_2)$ en enkel sluten kurva som är randkurva till ytan σ, och projektionen av $\gamma_1\cup(-\gamma)\cup(-\gamma_2)$ på xy-planet har riktning moturs. Insättning av $z=-2x+2y$ i $x^2+y^2+z^2=1$ ger $x^2+y^2+(-2x+2y)^2=1$, dvs $5x^2-8xy+5y^2=1$. Projektionen av γ_1 på xy-planet är linjen $y=\frac{1}{2}x$ i xy-planet, och projektionen av γ_2 på xy-planet är linjen $y=2x$ i xy-planet. Ytan σ är således den del av planet $z=-2x+2y$ där $5x^2-8xy+5y^2\le 1$ och $\frac{1}{2}x\le y\le x$. En parametrisering av ytan σ är $x=u$, $y=v$, $z=-2u+2v$, $5u^2-8uv+5v^2\le 1$, $\frac{1}{2}u\le v\le u$. Med $\mathbf{r}(u,v)=(u,v,-2u+2v)$ får vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v)=(1,0,-2),\quad \mathbf{r}_2'(u,v)=(0,1,2)\quad\text{och}\quad \mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v)=(2,-2,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v)$ till σ pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare N_σ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till σ. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{-\gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\int_{-\gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}= \tag{16}$$

(Enligt Stokes sats.)

$$=\iint_\sigma(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}_\sigma\,dS=\iint_\sigma(x^2+4y^2-1,-3xy,xz)\cdot\mathbf{N}_\sigma\,dS=$$

(Enligt den införda parametriseringen av σ.)

$$=+\iint_{5u^2-8uv+5v^2\le1,\frac{1}{2}u\le v\le u}\big(u^2+4v^2-1,-3uv,u(-2u+2v)\big)\cdot\big(2,-2,1\big)\,dudv=$$
$$=2\iint_{5u^2-8uv+5v^2\le1,\frac{1}{2}u\le v\le u}(4v^2+4uv-1)\,dudv$$

(Notera att $5u^2-8uv+5v^2=5\left(u-\frac{4}{5}v\right)^2+\frac{9}{5}v^2$.
Vi gör därför substitutionen $s=\sqrt{5}\left(u-\frac{4}{5}v\right)$, $t=\frac{3}{\sqrt{5}}v \iff u=\frac{1}{\sqrt{5}}s+\frac{4}{3\sqrt{5}}t$, $v=\frac{5}{3\sqrt{5}}t$.
Funktionaldeterminanten $\frac{d(u,v)}{d(s,t)}=\frac{1}{3}$.
Området $5u^2-8uv+5v^2\le1$, $\frac{1}{2}u\le v\le u$ övergår i området $t^2+s^2\le1$, $-\frac{1}{2}t\le s\le\frac{1}{3}t$,
och $4v^2+4uv-1$ övergår i $4t^2+\frac{4}{3}ts-1$.)

$$= 2\iint_{t^2+s^2\le 1,-\frac{1}{2}t\le s\le \frac{1}{3}} \left(4t^2+\frac{4}{3}ts-1\right)\left|\frac{1}{3}\right| dudv = \frac{2}{3}\iint_{t^2+s^2\le 1,-\frac{1}{2}t\le s\le \frac{1}{3}} \left(4t^2+\frac{4}{3}ts-1\right) dudv =$$

(Inför polära koordinater $t = r\cos\theta$, $s = r\sin\theta$. Sätt $\alpha = \arctan\frac{1}{2}$ och $\beta = \arctan\frac{1}{3}$.)

$$= \frac{2}{3}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ -\alpha\le\theta\le\beta}} \left(4r^2\cos^2\theta+\frac{4}{3}r^2\cos\theta\sin\theta-1\right) r\,drd\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-\alpha}^{\beta}\left(\int_0^1 \left(4r^3\cos^2\theta+\frac{4}{3}r^3\cos\theta\sin\theta-r\right) dr\right)d\theta =$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-\alpha}^{\beta}\left(\cos^2\theta+\frac{1}{3}\cos\theta\sin\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta = \frac{2}{3}\int_{-\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{6}\sin 2\theta\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{18}\int_{-\alpha}^{\beta}(6\cos 2\theta+2\sin 2\theta)\,d\theta = \frac{1}{18}\Big[3\sin 2\theta-\cos 2\theta\Big]_{-\alpha}^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{18}\big(3\sin 2\beta-\cos 2\beta-(3\sin(-2\alpha)-\cos(-2\alpha))\big) = \frac{1}{18}\big(3\sin 2\alpha+3\sin 2\beta+\cos 2\alpha-\cos 2\beta\big) =$$

$$= \frac{1}{9}(3\cos\alpha\sin\alpha+3\cos\beta\sin\beta+\cos^2\alpha-\cos^2\beta) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+3\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2-\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2\right) = \frac{2}{9}.$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 2t$, $y = t$, $z = -2t$, $0 \le t \le \frac{1}{3}$, och den ger att

$$\int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{1/3}\left(4t^3\cdot 2+t\cdot 1+\left(4t^3+\frac{4}{3}t^3-t\right)\cdot(-2)\right) dt = \tag{17}$$

$$= \int_0^{1/3}\left(-\frac{20}{3}t^3+3t\right) dt = \left[-\frac{5}{4}t^4+\frac{3}{2}t^2\right]_0^{1/3} = \frac{71}{2\cdot 3^5}.$$

En parametrisering av γ_2 är $x = t$, $y = 2t$, $z = 2t$, $0 \le t \le \frac{1}{3}$, och den ger att

$$\int_{-\gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\gamma_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{1/3}\left(-4t^3\cdot 1+2t\cdot 2+\left(2t^3+\frac{32}{3}t^3-2t\right)\cdot 2\right) dt = \tag{18}$$

$$= -\int_0^{1/3}\frac{26}{3}t^3\,dt = -\left[\frac{13}{6}t^4\right]_0^{1/3} = -\frac{13}{2\cdot 3^5}.$$

Vidare är

$$\int_{-\gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{19}$$

Av (16), (17), (18) och (19) följer att

$$\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{71}{2\cdot 3^5}-\frac{13}{2\cdot 3^5}-\frac{2}{9} = -\frac{5}{81}.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.