MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys IV
110114

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Bestäm för var och en av de generaliserade integralerna

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{5/4}}\,dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{5/4}}\,dx \quad \text{och} \quad \int_2^\infty \frac{\sin x}{\ln x}\,dx$$

om integralen är konvergent eller divergent. 6 p

b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y'' - 2xy' - 2y = 0$ med bivillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. Den erhållna lösningen $y(x)$ är en viss elementär funktion. Vilken? 6 p

2. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (ye^{xy} - 3x^2y^2 - 1)\,dx + (xe^{xy} + 4y^3)\,dy$ där γ är kurvan $x^3 + y^3 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ från punkten $(1, 0)$ till punkten $(0, 1)$. 8 p

3. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $(x-1)^2 + (y-z)^2 + z^2 = 1$ där $z \geq 0$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (z^4, y^3, x^2)$. 8 p

4. Låt γ_1 vara skärningskurvan mellan ytan $z = x^2 + 2y^2$ och planet $z = 2x + 3$, med kurvans riktning sådan att kurvans projektion på xy-planet har omloppsriktning moturs. Låt γ_2 vara den del av γ_1 där $y \geq 0$. Beräkna kurvintegralen $\int_\Gamma 2x\,dx + (x^3 + 6y^5 + z^7)\,dy + (x + y^3 + 7yz^6)\,dz$ dels om $\Gamma = \gamma_1$ och dels om $\Gamma = \gamma_2$. 8 p

5. Beräkna volymen av området $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. 8 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. (Jämförelsekriterium I och II för positiva serier)

(i) Antag att $\sum_{k=1}^\infty b_k$ är konvergent och att $0 \leq a_k \leq \alpha b_k$ för $k = 1, 2, \ldots$ för något tal $\alpha \geq 0$. Visa att då är även $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent.

(ii) Antag att $a_k,\ b_k \geq 0$ för $k = 1, 2, \ldots$ och att $\dfrac{a_k}{b_k} \to A$ då $k \to \infty$ där $0 < A < \infty$. Visa att då är de båda serierna $\sum_{k=1}^\infty a_k$ och $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergenta och divergenta samtidigt. 12 p

7. (Satsen om en potensseries konvergensradie.) Visa att för en potensserie kring 0 i variabeln x gäller något av följande tre alternativ.

(i) Potensserien konvergerar enbart för $x = 0$.

(ii) Det finns ett tal $r > 0$ sådant att potensserien är absolutkonvergent om $|x| < r$ och divergent om $|x| > r$.

(iii) Potensserien är absolutkonvergent för alla x. 12 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning fr 21/1 kl 12.00-12.15 i rum 328 hus 6, därefter i rum 208 hus 6.