Lösningar till Matematisk analys 4, 110114

1. a) Vi behandlar de generaliserade integralerna i tur och ordning.

Den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x)\,dx$ där $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^{5/4}}$:

Integralen är generaliserad på två sätt, dels genom att $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$ och dels genom att övre integrationsgränsen är $+\infty$. Vi gör därför en uppdelning av den givna generaliserade integralen i två delintegraler som var och en enbart är generaliserade på ett sätt. Vi gör uppdelningen

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Delintegralen $\int_0^1 f(x)\,dx$ är då positiv och generaliserad enbart genom att $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$, och delintegralen $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är $+\infty$. Den givna generaliserade integralen är konvergent precis om precis om båda delintegralerna är konvergenta. Vi har att

$$f(x) \Big/ \frac{1}{x^{5/4}} = \cos x \to 1 \quad \text{då} \quad x \to 0^+$$

och eftersom

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{5/4}}\,dx$$

är en divergent positiv generaliserad standardintegral så är $\int_0^1 f(x)\,dx$ divergent enligt ett jämförelsekriterium för positiva integraler, och alltså är även $\int_0^\infty f(x)\,dx$ divergent.

Den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x)\,dx$ där $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^{5/4}}$:

Integralen är generaliserad på två sätt, dels genom att $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$ och dels genom att övre integrationsgränsen är $+\infty$. Vi gör därför en uppdelning av den givna generaliserade integralen i två delintegraler som var och en enbart är generaliserade på ett sätt. Vi gör uppdelningen

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Delintegralen $\int_0^1 f(x)\,dx$ är då positiv och generaliserad enbart genom att $f(x) \to +\infty$ då $x \to 0^+$, och delintegralen $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är $+\infty$. Den givna generaliserade integralen är konvergent precis om precis om båda delintegralerna är konvergenta. Vi har att

$$f(x) \Big/ \frac{1}{x^{1/4}} = \frac{\sin x}{x} \to 1 \quad \text{då} \quad x \to 0^+$$

och eftersom

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,dx$$

är en konvergent positiv generaliserad standardintegral så är $\int_0^1 f(x)\,dx$ konvergent enligt ett jämförelsekriterium för positiva integraler. Vidare har vi att

$$|f(x)| = \left|\frac{\sin x}{x^{5/4}}\right| \le \frac{1}{x^{5/4}} \quad \text{för alla } x \ge 1$$

och eftersom

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/4}}\,dx$$

är en konvergent positiv generaliserad standardintegral så är $\int_0^1 |f(x)|\,dx$ konvergent enligt ett jämförelse-kriterium för positiva integraler. Men absolutkonvergent medför konvergens så även $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent. Båda delintegralerna är således konvergenta, och alltså är även $\int_0^\infty f(x)\,dx$ konvergent

Den generaliserade integralen $\int_2^\infty f(x)\,dx$ där $f(x)=\dfrac{\sin x}{\ln x}$:
Integralen är generaliserad enbart att övre integrationsgränsen är $+\infty$. Två partiella integrationer ger för $T\geq 2$ att

$$\int_2^T f(x)\,dx=\int_2^T(\sin x)(\ln x)^{-1}\,dx=\Big[(-\cos x)(\ln x)^{-1}\Big]_2^T-\int_2^T(-\cos x)\left(-(\ln x)^{-2}x^{-1}\right)\,dx$$

$$=-\frac{\cos T}{\ln T}+\frac{\cos 2}{\ln 2}-\int_2^T(\cos x)(\ln x)^{-2}x^{-1}\,dx$$

$$=-\frac{\cos T}{\ln T}+\frac{\cos 2}{\ln 2}-\left(\Big[(\sin x)(\ln x)^{-2}x^{-1}\Big]_2^T-\int_2^T(\sin x)\left(-2(\ln x)^{-3}x^{-2}-(\ln x)^{-2}x^{-2}\right)\,dx\right)$$

$$=-\frac{\cos T}{\ln T}-\frac{\sin T}{T(\ln T)^2}+\frac{\cos 2}{\ln 2}+\frac{\sin 2}{2(\ln 2)^2}+\int_2^T\frac{\sin x}{x^2}\left(\frac{2}{(\ln x)^3}+\frac{1}{(\ln x)^2}\right)\,dx.$$

Sätt

$$g(x)=\frac{\sin x}{x^2}\left(\frac{2}{(\ln x)^3}+\frac{1}{(\ln x)^2}\right).$$

Eftersom

$$-\frac{\cos T}{\ln T}-\frac{\sin T}{T(\ln T)^2}\to 0\quad\text{då}\quad T\to+\infty$$

får vi då från partialintegrationslikheten ovan att

$$\textstyle\int_2^T f(x)\,dx\to\text{ändligt tal då }T\to+\infty\quad\Longleftrightarrow\quad\int_2^T g(x)\,dx\to\text{ändligt tal då }T\to+\infty.$$

Det följer att

$$\textstyle\int_2^\infty f(x)\,dx\text{ är konvergent}\quad\Longleftrightarrow\quad\int_2^\infty g(x)\,dx\text{ är konvergent.}$$

Men eftersom

$$|g(x)|=\left|\frac{\sin x}{x^2}\left(\frac{2}{(\ln x)^3}+\frac{1}{(\ln x)^2}\right)\right|\leq\left((\frac{2}{(\ln 2)^3}+\frac{1}{(\ln 2)^2}\right)\frac{1}{x^2}\quad\text{om }x\geq 2,$$

och eftersom

$$\int_2^\infty\frac{1}{x^2}\,dx$$

är en konvergent positiv generaliserad standardintegral så är $\int_2^\infty g(x)\,dx$ absolutkonvergent och därmed konvergent. Följaktligen är $\int_2^\infty f(x)\,dx$ konvergent.

b) I enlighet med problemtexten ansätter vi att

$$y=\sum_{k=0}^\infty a_kx^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y'=\sum_{k=0}^\infty ka_kx^{k-1}\text{ och att }y''=\sum_{k=0}^\infty k(k-1)a_kx^{k-2}.$$

Insättning i givna differentialekvationen ger sedan att

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0. \tag{1}$$

Men

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1}}_{\text{Sätt } \ell = k-2} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1)a_{\ell+2} x^{\ell}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k,$$

och

$$2x\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 2(k+1)a_k x^k.$$

Sambandet (1) kan därför skrivas

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big((k+2)(k+1)a_{k+2} - 2(k+1)a_k\big)x^k = 0.$$

Vi får således att

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2(k+1)a_k = 0 \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots$$

och alltså att

$$a_{k+2} = \frac{2}{k+2}a_k \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots\ .$$

Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots \quad \text{och} \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots$$

samt $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$, får vi vidare att $a_0 = 1$ och $a_1 = 0$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \ldots$ således att

$$a_{k+2} = \frac{2}{k+2}a_k, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{2}$$

samt

$$a_0 = 1 \quad \text{och} \quad a_1 = 0.$$

Av $a_1 = 0$ och (2) följer att $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Av $a_0 = 1$ och (2) följer att

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{2}a_0 = 1, \\ a_4 &= \frac{2}{4}\,a_2 = \frac{1}{2}, \\ a_6 &= \frac{2}{6}\,a_4 = \frac{1}{3}\,a_4 = \frac{1}{2\cdot 3}, \\ &\ \vdots, \end{aligned}$$

dvs att

$$a_{2k} = \frac{1}{k!} \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Notera här också att formeln för a_{2k} även stämmer för $k = 0$. Den sökta potensserielösningen är alltså

(3) $$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^{2k}.$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = \frac{1}{k!}\, x^{2k}$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{1}{(k+1)!}\, |x|^{2(k+1)} \cdot \frac{k!}{1}\, \frac{1}{|x|^{2k}} = \frac{1}{k+1}|x|^2 \to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (3) är absolutkonvergent för alla x. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent för alla x, och följaktligen är potensserielösningens konvergensradie ∞ (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen på hela räta linjen. Vi noterar sedan slutligen att eftersom

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, (x^2)^k$$

och

$$e^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} u^k$$

så är den erhållna lösningen $y(x) = e^{x^2}$.

2. Sätt

$$P(x, y) = ye^{xy} - 3x^2y^2 - 1 \quad \text{och} \quad Q(x, y) = xe^{xy} + 4y^3.$$

Låt γ_1 vara y-axeln från punkten $(0, 0)$ till punkten $(0, 1)$, låt γ_2 vara x-axeln från punkten $(0, 0)$ till punkten $(1, 0)$, och låt D vara området $x^3 + y^3 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Greens formel ger att

$$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + \int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q'_1 - P'_2)\,dxdy.$$

Men $\int_{-\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy$ och $Q'_1 - P'_2 = 6x^2y$. Vi får att

(4) $$\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy + \iint_D 6x^2y\,dxdy.$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 0$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$, och den ger att

(5) $$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 4t^3\,dt = 1.$$

En parametrisering av γ_2 är $x = t$, $y = 0$, $0 \leq t \leq 1$, och den ger att

(6) $$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \int_0^1 (-1)\,dt = -1.$$

Vidare har vi att

$$\iint_D 6x^2y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\left(1-y^3\right)^{1/3}} 6x^2y\,dx \right) dy = \int_0^1 \left(\left[2x^3y\right]_{x=0}^{x=\left(1-y^3\right)^{1/3}} \right) dy =$$

(7) $$= \int_0^1 2\big(1 - y^3\big)y\,dy = \int_0^1 \big(2y - 2y^4\big)\,dy = \Big[y^2 - \frac{2}{5}y^5\Big]_0^1 = \frac{3}{5}$$

(5), (6) och (7) insatt i (4) ger att $\int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = \frac{13}{5}$

3. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 0$ där $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Ytan $Y \cup Y_1$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dxdydz. \tag{8}$$

En parametrisering av ytan Y_1 är $x = u$, $y = v$, $z = 0$, där $(u-1)^2 + v^2 \leq 1$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, 0\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,0,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 \, dS = \iint_{Y_1} (z^4, y^3, x^2) \cdot \mathbf{N_1} \, dS = \tag{9}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_1.)

$$= -\iint_{(u-1)^2+v^2 \leq 1} \big(0, v^3, u^2\big) \cdot (0,0,1) \; dudv = -\iint_{(u-1)^2+v^2 \leq 1} u^2 \, dudv =$$

(Gör substitutionen $s = u - 1$, $t = v \iff u = s + 1$, $v = t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = 1$, och $(u-1)^2 + v^2 \leq 2$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 1$.)

$$= -\iint_{s^2+t^2 \leq 1} (s+1)^2 |1| \, dsdt = -\iint_{s^2+t^2 \leq 1} \big(s^2 + 2s + 1\big) \; dsdt =$$

(Eftersom $2s$ är udda i s och området $s^2 + t^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= -\iint_{s^2+t^2 \leq 1} \big(s^2 + 1\big) \; dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \leq 1$ är symmetriskt i s och t.)

$$= -\iint_{s^2+t^2 \leq 1} \left(\frac{1}{2}(s^2 + t^2) + 1\right) \; dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= -\iint_{\substack{0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \left(\frac{1}{2}\,r^2 + 1\right) r \, dr \, d\theta = -2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\,r^3 + 2r\right) \; dr = -2\pi \left[\frac{1}{8}\,r^4 + r^2\right]_0^1 = -\frac{9\pi}{4}.$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3y^2$ och D är mängden $(x-1)^2 + (y-z)^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, och vi får att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F} \, dxdydz = \iiint_D 3y^2 \, dxdydz = \tag{10}$$

(Gör substitutionen $u = x - 1$, $v = y - z$, $w = z \iff x = u + 1$, $y = v + w$, $z = w$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y,x)}{d(u,v,w)} = 1$, och $(x-1)^2 + (y-z)^2 + z^2 \leq$, $z \geq 0$ övergår i $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, $w \geq 0$.)

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1, w \geq 0} 3(v+w)^2 \, dudvdw = 3 \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1, w \geq 0} (v^2 + 2vw + w^2) \, dudvdw =$$

(Eftersom $2vw$ är udda i v och området $u^2+v^2+w^2 \le 1$, $w \ge 0$ är symmetriskt kring $v=0$.)

$$= 3 \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1, w\ge 0} (v^2+w^2)\, dudvdw =$$

(Eftersom v^2+w^2 är jämn i w och området $u^2+v^2+w^2 \le 1$ är symmetriskt kring $w=0$.)

$$= \frac{3}{2} \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} (v^2+w^2)\, dudvdw =$$

(Eftersom området $u^2+v^2+w^2 \le 1$ är symmetriskt i u, v och w.)

$$= \frac{3}{2} \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} \left(\frac{1}{3}(u^2+v^2+w^2) + \frac{1}{3}(u^2+v^2+w^2)\right) dudvdw =$$

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1} (u^2+v^2+w^2)\, dudvdw =$$

(Inför rymdpolära koordinater r, θ, φ.)

$$= \iiint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi<2\pi}} r^2 r^2 \sin\theta\, drd\theta d\varphi = \int_0^1 r^4\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{5}.$$

Av (8), (9) och (10) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \frac{4\pi}{5} + \frac{9\pi}{4} = \frac{61\pi}{20}$$

4. Vi beräknar de båda kurvintegralerna genom att använda Stokes sats.

Fallet $\Gamma = \gamma_1$. Vi bestämmer först skärningen mellan ytan $z = x^2 + 2y^2$ och planet $z = 2x+3$. Sambandet $z = 2x+3$ från planets ekvation ger insatt i ytans ekvation att $2x+3 = x^2+2y^2$, dvs $(x-1)^2 + 2y^2 = 4$. Skärningen är alltså kurvan bestående av alla (x,y,z) sådana att $z = 2x+3$ och $(x-1)^2+2y^2 = 4$. Kurvan γ_1 är denna kurva med riktning sådan att kurvans projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. Låt Y_1 beteckna den del av ytan $z = 2+3x$ där $(x-1)^2+2y^2 \le 4$. Kurvan γ_1 är då randkurva till ytan Y_1. En parametrisering av ytan Y_1 är $x=u$, $y=v$, $z=2u+3$, $(u-1)^2+2v^2 \le 4$. Med $\mathbf{r}(u,v) = (u,v,2u+3)$ får vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,2), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v) = (-2,0,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N_1}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_1. Med dessa beteckningar har vi att

$$\int_{\gamma_1} 2x\, dx + (x^3+6y^5+z^7)\, dy + (x+y^3+7yz^6)\, dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_{Y_1} \left(\nabla\times\left(2x, x^3+6y^5+z^7, x+y^3+7yz^6\right)\right)\cdot\mathbf{N}_1\, dS = \iint_{Y_1} (3y^2,-1,3x^2)\cdot\mathbf{N}_1\, dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_1.)

$$= +\iint_{(u-1)^2+2v^2\le 4} \left(3v^2,-1,3u^2\right)\cdot(-2,0,1)\, dudv =$$

$$= 3\iint_{(u-1)^2+2v^2\le 4} (u^2-2v^2)\, dudv =$$

(Gör substitutionen $s = u - 1$, $t = \sqrt{2}v \iff u = s + 1$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $(u-1)^2 + 2v^2 \leq 4$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 4$.)

$$= 3 \iint_{s^2+t^2\leq 4} \left((s+1)^2 - t^2\right) \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt = \frac{3\sqrt{2}}{2} \iint_{s^2+t^2\leq 4} \left((s+1)^2 - t^2\right) dsdt =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \iint_{s^2+t^2\leq 4} (s^2 - t^2 + 2s + 1)\, dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \leq 1$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \iint_{s^2+t^2\leq 4} (2s + 1)\, dsdt =$$

(Eftersom 2s är udda i s och området $s^2 + t^2 \leq 4$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \iint_{s^2+t^2\leq 4} dsdt = \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{area}(s^2 + t^2 \leq 4) = \frac{3\sqrt{2}}{2} \pi \cdot 2^2 = 6\pi\sqrt{2}.$$

Fallet $\Gamma = \gamma_2$. Kurvan γ_2 är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ_2 till en sluten kurva. Vi gör på följande sätt. Kurvan γ_1 består enligt ovan av alla (x, y, z) sådana att $z = 2x + 3$ och $(x - 1)^2 + 2y^2 = 4$, och riktningen för kurvan γ_1 är sådan att kurvans projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning. Skärningspunkterna mellan γ_1 och planet $y = 0$ är de (x, y, z) för vilka $y = 0$, $z = 2x + 3$ och $(x - 1)^2 + 2y^2 = 4$, dvs punkterna $(3, 0, 9)$ och $(-1, 0, 1)$. Eftersom kurvan γ_2 är den del av kurvan γ_1 som ligger i $y \geq 0$ är följaktligen kurvan γ_2 alla (x, y, z) sådana att $z = 2x + 3$ och $(x - 1)^2 + 2y^2 = 4$ från punkten $(3, 0, 9)$ till punkten $(-1, 0, 1)$ i $y \geq 0$. Låt γ_3 vara skärningskurvan mellan planen $z = 2x + 3$ och $y = 0$ från punkten $(-1, 0, 1)$ till punkten $(3, 0, 9)$, dvs räta linjen från punkten $(-1, 0, 1)$ till punkten $(3, 0, 9)$ Låt också Y_2 vara den del av planet $z = 2x + 3$ där $(x - 1)^2 + 2y^2 \leq 4$, $y \geq 0$. Kurvan $\gamma_2 \cup \gamma_3$ är då en sluten kurva vars projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning, och $\gamma_2 \cup \gamma_3$ är randkurva till ytan Y_2. En parametrisering av ytan Y_2 är $x = u$, $y = v$, $z = 2u + 3$, $(u - 1)^2 + 2v^2 \leq 4$, $v \geq 0$. Låt $\mathbf{N_2}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y_2. Med dessa beteckningar har vi att

$$(11) \quad \int_{\gamma_2} 2x\,dx + (x^3 + 6y^5 + z^7)\,dy + (x + y^3 + 7yz^6\,dz + \int_{\gamma_3} 2x\,dx + (x^3 + 6y^5 + z^7)\,dy + (x + y^3 + 7yz^6\,dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_{Y_2} \left(\nabla \times \left(2x, x^3 + 6y^5 + z^7, x + y^3 + 7yz^6\right)\right) \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iint_{Y_2} (3y^2, -1, 3x^2) \cdot \mathbf{N_2}\, dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_2.)

$$= + \iint_{(u-1)^2+2v^2\leq 4, v\geq 0} \left(3v^2, -1, 3u^2\right) \cdot (-2, 0, 1)\, dudv =$$

$$= 3 \iint_{(u-1)^2+2v^2\leq 4, v\geq 0} (u^2 - 2v^2)\, dudv =$$

(Eftersom $u^2 - 2v^2$ är jämn i v och området $(u - 1)^2 + 2v^2 \leq 4$ är symmetriskt kring $v = 0$.)

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \iint_{(u-1)^2+2v^2\leq 4} (u^2 - 2v^2)\, dudv =$$

(Se första delen ovan.)

$$= \frac{1}{2} \cdot 6\pi\sqrt{2} = 3\pi\sqrt{2}.$$

En parametrisering av γ_3 är $(x, y, z) = (-1, 0, 1) + t(1, 0, 2)$, $0 \le t \le 4$, dvs $x = -1 + t$, $y = 0$, $z = 1 + 2t$, $0 \le t \le 4$, och den ger att

(12)
$$\int_{\gamma_3} 2x\,dx + (x^3 + 6y^5 + z^7)\,dy + (x + y^3 + 7yz^6\,dz =$$

$$\int_0^4 \big(2(-1+t)\cdot 1 + 0 + (-1+t)\cdot 2\big)\,dt = 4\int_0^4 (-1+t)\,dt = 4\left[-t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^4 = 16$$

Av (11) och (12) följer att

$$\int_{\gamma_3} 2x\,dx + (x^3 + 6y^5 + z^7)\,dy + (x + y^3 + 7yz^6\,dz = 3\pi\sqrt{2} - 16.$$

5. Låt D vara det givna området $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. Vi har att

(13)
$$\mathrm{vol}(D) = \iiint_D dxdydz =$$

(Gör substitutionen $x = u^3$, $y = v^3$, $z = w^3$,
substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y,x)}{d(u,v,w)} = 27u^2v^2w^2$,
och $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ övergår i $u^2 + v^2 + w^2 \le 1$, $u \ge 0$, $v \ge 0$, $w \ge 0$.)

$$= 27\iiint_{u^2+v^2+w^2\le 1, u\ge 0, v\ge 0, w\ge 0} u^2v^2w^2\,dudvdw =$$

$$= 27\iint_{u^+v^2\le 1, u\ge 0, v\ge 0} u^2v^2\left(\int_0^{\sqrt{1-u^2-v^2}} w^2\,dw\right)dudv =$$

$$= 9\iint_{u^+v^2\le 1, u\ge 0, v\ge 0} u^2v^2\left(1-u^2-v^2\right)^{3/2}dudv =$$

(Inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.)

$$= 9\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le\pi/2}} (r^2\cos^2\theta)(r^2\sin^2\theta)(1-r^2)^{3/2} r\,drd\theta =$$

$$= 9\int_0^1 r^4(1-r^2)^{3/2} r\,dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta.$$

Men

$$\int_0^1 r^4(1-r^2)^{3/2} r\,dr =$$

(Gör substitutionen $u = 1 - r^2$. Då är $\frac{du}{dr} = -2r$ så $r\,dr = -\frac{1}{2}du$,
samt $r = 0$ ger $u = 1$ och $r = 1$ ger $u = 0$.)

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 (1-u)^2u^{3/2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)^2u^{3/2}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^{3/2} - 2u^{5/2} + u^{7/2})\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - \frac{4}{7}u^{7/2} + \frac{2}{9}u^{9/2}\right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{7} + \frac{1}{9} = \frac{8}{5\cdot 7\cdot 9},$$

och

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta =$$

$$(\text{Använd att } \cos^2\theta\sin^2\theta = \tfrac{1}{4}\sin^2 2\theta = \tfrac{1}{8}(1-\cos 4\theta).)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{16},$$

vilket med (13) ger att den sökta volymen

$$\operatorname{vol}(D) = 9\cdot\frac{8}{5\cdot 7\cdot 9}\cdot\frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{70}.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.