MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Tentamen i
Matematisk analys 4,
den 30 maj 2011

Ett nödvändigt villkor for godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Problemdel

1. Vilka av följande serier är *absolut konvergenta*, *betingat konvergenta*, respektive *divergenta*?

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}+\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k-1}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \qquad \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} \qquad (4p)$$

2. a) För vilka $x \in \mathbb{R}$ konvergerar serien (3p)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{2^k}\big(1+\frac{1}{k}\big)^{-k}\ ?$$

   b) Antag att potensserien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-1)^k$ är konvergent för $z = 2i$. (2p)
   Vad vet man då om konvergensen av serien i punkterna $z = -3$ samt $z = 3$?
   Tips: Rita i det komplexa planet.

3. a) Beräkna flödet av fältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xy^2, x\sin z - y, zy^2)$ <u>in</u> i området (3p)

$$K = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le x \le 3,\ 1 \le y \le 4,\ 2 \le z \le 4\big\}.$$

   b) Beräkna kurvintegralen (3p)

$$\int_\sigma \frac{-y}{x^2+4y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+4y^2}\,dy$$

   längs den positivt orienterade ellipsen $\sigma : \pi x^2 + ey^2 = 1$.

4. Låt a vara ett positivt reellt tal. (5p)
   Skissera samt beräkna volymen av den kropp som begränsas av

$$x^2 + y^2 = 2az \qquad \text{och} \qquad x + z = 4a.$$

5. Låt

$$A = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}\big\}$$

   och

$$B = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = -\sqrt{1-(x^2+y^2)}\big\}$$

   vara givna med "utåt" orienterade normal, och låt $\mathbf{v}$ vara ett $\mathcal{C}^1$-fält med

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2).$$

   a) Skissera ytorna A och B samt deras randkurvor med kompatibel orientering. (1p)
   b) Beräkna flödesintegralen $\iint_A \operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{N}dS$. (2p)
   c) Bestäm kurvintegralen $\int_{\partial B}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$. (2p)

   Tips: I deluppgift c) behövs inte så mycket räknande, men glöm inte att motivera ditt svar ordentligt!

Var god vänd!

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. (5p)

7. (Cauchys rotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är sådan att

$$|a_k|^{1/k} \to A \text{ då } k \to \infty, \text{ där } 0 \le A \le \infty.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolut konvergent om $0 \le A < 1$, och divergent om $1 < A \le \infty$. (5p)

Skrivningsåterlämning onsdagen den 1 juni kl 16.00 i sal 34, därefter hos vaktmästaren Reine Elfsö.

Lycka till!