MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Svar till tentamen i
Matematisk analys 4,
den 30 maj 2011

Endast kommenterade svar!!!
OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. - divergent, ty $\frac{1}{\sqrt{k-1}} + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{2}{\sqrt{k}}$
   - absolut konvergent, ty $\frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}} = \ldots = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k-1}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} \leq \frac{1}{2(k-1)^{3/2}}$
     Alternativt man kan ocks konstatera att det handlar faktiskt om en teleskopsumma.
   - betingat konvergent, (enligt Leibniz kriterium, ty $\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$ är monotont avtagende och går mot 0 då $k \to \infty$), ej absolut konvergent, ty $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$ är divergent.

2. a) $|x| < 2$
   Med rotkriteriet ser man att konvergensradien $R = 2$. I randpunkterna $x = \pm 2$ går termerna ej mot 0, och därför är serien inte konvergent där.

   b) Potensserien konvergerar i $z = 3$, ty $|3-1| < |2i-1|$ (jf. Hjälpsats 3.1). I punkten $z = -3$ är både konvergens eller divergens möjligt ty $|-3-1| > |2i-1|$.

3. a) Om ∂K är så orienterad att normalvektorn pekar utåt, så gäller för flödet Φ in i området K

$$\Phi = -\iint_{\partial K} \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = -\iiint_K \operatorname{div}\mathbf{F}\, dxdydz = -\iiint_K -1\, dxdydz = \operatorname{Vol}(K) = 12.$$

   b)

$$\int_\sigma \frac{-y}{x^2+4y^2}\, dx + \frac{x}{x^2+4y^2}\, dy = \pi.$$

   Eftersom $\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+4y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2+4y^2}$ kan kurvan σ bytas ut mot en godtycklig enkel sluten kurva som går ett positivt varv kring origo. Välj en ellips, sådan att kurvintegralen blir lätt att beräkna!

4. Planet $x + z = 4a$ skär av kroppen från paraboloiden $x^2 + y^2 = 2az$. Projektionen av skärningskurvan i planet är cirkeln $(x+a)^2 + y^2 = 9a^2$.
   Med beteckningen $D : (x+a)^2 + y^2 \leq 9a^2$ får man

$$V = \iint_D \Big(\int_{\frac{1}{2a}(x^2+y^2)}^{4a-x} 1\, dz \Big) dxdy = \ldots = \frac{81a^3\pi}{4},$$

   Vid beräkningen av dubbelintegralen över området D är det fördelaktigt att använda sig av förskjutna polära koordinater: $x + a = r\cos t$ och $y = r\sin t$ där $0 \leq r \leq 3a$ och $0 \leq t \leq 2\pi$.

5. a) A är en nedåt öppen kägel med spets i $(0,0,1)$ och höjd 1, randkurvan är enhetscirkeln i xy-planet, positivt genomlupen. B är den delen av enhetssfären som ligger under xy-planet, randkurvan är samma som för A, fast med motsatt orientering.

   b) $\iint_A \operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dS = \frac{\pi}{4}$
   Till exempel, genom direkt beräkning med följande parametrisering av kägeln A

$$\mathbf{r}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ 1-t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

   Alternativ: Antingen Gauss'sats eller så kan man även välja ett lämpligt fält $\mathbf{v}$ och använda sig av Stokes'sats.

c) Använd Stokes sats och uppgift b).

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\partial A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = -\iint_{A} \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{N} dS = -\frac{\pi}{4}$$

6. Sats 2 och 3 i PB, kapitel 9.4.

7. Se kompendiet.