MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Tentamen i
Matematisk analys 4,
den 18 augusti 2011

Ett nödvändigt villkor for godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Inga hjälpmedel är tillåtna.

Problemdel

1. a) För vilka $x \in \mathbb{R}$ är serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \frac{x^k}{3^k}$ konvergent? (3p)

   b) Undersök om den generaliserade integralen (2p)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^3}\, dx$$

   är konvergent.

2. a) Vilka av följande serier är konvergenta? (4p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty} k\big(e^{\frac{1}{k^3}} - 1\big)$$

   b) Betrakta följande påståendet för serier med positiva termer, dvs $a_k > 0$, $k = 0, 1, 2 \ldots$:

Om serien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är konvergent, så är serien $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ divergent.

   – Är påståendet sant?
   – Gäller omvändningen?

   Motivera dina svar! (2p)

3. a) Låt K vara området som definieras av (3p)

$$K : 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

   Bestäm flödet av fältet $\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2}$ (där $\mathbf{r} = (x, y, z)$) som vanligt) ut ur området K.

   b) <u>*Beräkna*</u> arean av en sfär med radie R. OBS: Endast resultat räknas inte. (3p)

4. Låt kurvan γ vara given med parametriseringen (4p)

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t, 2\sin t, -t), \quad t \in [0, 4\pi].$$

   a) Beskriv med ord, hur kurvan γ ser ut.

   b) Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ där $\mathbf{F} = \big(z\cos(xz), \cos z, x\cos(xz) - y\sin z - 1\big)$.

5. Låt a vara ett positivt reellt tal. Beräkna volymen av den kropp i halvrummet $y > 0$ som begränsas av (4p)

$$z = xy, \qquad x^2 + y^2 = 2ax \qquad \text{och} \qquad z = 0.$$

Var god vänd!

Teoridel

Välj <u>*en av*</u> *följande två uppgifter.*

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. (5p)

7. (Cauchys konvergenskriterium för positiva serier.) Låt $f(x)$ vara ≥ 0 och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Visa att den oändliga serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)dx$ båda är konvergenta och divergenta samtidigt. (5p)

Skrivningsåterlämning fredagen den 26 augusti kl 16.00 i sal 34, därefter hos vaktmästaren Reine Elfsö. Vill du ha resultatet per epost, så skicka ett ebrev till mig, `luger@math.su.se`

Lycka till!