MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Annemarie Luger

Svar till tentamen i
Matematisk analys 4,
den 18 augusti 2011

Endast kommenterade svar!!!

OBS: Inte alla delsteg är redovisade!

1. a) Kvotkriterium eller rotkriterium ger konvergensradien $R = 3$.

   $x = -3$: serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ är divergent (harmonisk serie)

   $x = 3$: serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ är konvergent (enligt Leibniz)

   Svar: $]-3, 3]$

   b) Uppskattningen

   $$\left|\frac{\sin x}{1+x^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{för } x \geq 1$$

   eller alternativt

   $$\left|\frac{\sin x}{1+x^3}\right| \leq \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

   tillsammans med jämförelsekriterium ger att integralen $\int_{\mathbf{1}}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^3}\,dx$ är abolut konvergent. Därmed är även integralen $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^3}\,dx$ absolut konvergent och därför **konvergent**.

2. a) För båda serier är det fördelaktigt att använda sig av jämförelsekriterier:

   $$\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})} \geq \frac{1}{2k} \text{ medför att serien } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \text{ är } \textbf{divergent}.$$

   $$\lim_{k\to\infty} \frac{k\big(e^{\frac{1}{k^3}}-1\big)}{\frac{1}{k^2}} = 1 \text{ medför att serien } \sum_{k=1}^{\infty} k\big(e^{\frac{1}{k^3}}-1\big) \text{ är } \textbf{konvergent}.$$

   b)
   - Påståendet är **sant**, ty antagandet medför att $a_k \to 0$ och därmed kan $\frac{1}{a_k}$ inte gå mot 0, vilket är ett nödvändigt villkor för konvergens.
   - Omvändningen **gäller inte**. Motexempel är till exempel: $a_k = 1$ eller $a_k = \frac{1}{k+1}$.

3. a) En möjlighet är att använda sig av Gauss sats. Med

   $$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{r^2-2x^2}{r^4} + \frac{r^2-2y^2}{r^4} + \frac{r^2-2z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$$

   får man

   $$\iint_{\partial K} \mathbf{u}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\mathbf{u}\,dxdydz = \int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{r^2}\cdot r^2 \sin\vartheta\,d\vartheta d\varphi dr = \underline{4\pi(2-\sqrt{2})}.$$

   Eller så kan man beräkna integralen även direkt med en lämplig parametrisering av sfärerna.

   b) En möjlighet att lösa uppgiften är att använda sig av följande parametrisering av sfären S_R med radie R: $\mathbf{r}(\varphi,\vartheta) = \big(R\cos\varphi\sin\vartheta, R\sin\varphi\sin\vartheta, R\cos\vartheta\big)$. Då får man

   $$dS = |\mathbf{r}'_\varphi \times \mathbf{r}'_\vartheta|\,d\varphi d\vartheta = R^2 \sin\vartheta\,d\varphi d\vartheta$$

   och därmed

   $$A = \iint_{S_R} dS = R^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta d\varphi d\vartheta = \underline{4R^2\pi}.$$

   (En annan möjlighet är att använda sig av formeln för en rotationsyta.)

4. a) Kurvan ligger på den elliptiska cylindern $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$. Det är en spiral som går två varv kring z-axeln (nedåt) från punkten $(3,0,0)$ till $(3,0,-4\pi)$.

   b) $\mathbf{F}$ är ett potentialfält med potential $U(x,y,z) = \sin xz + y\cos z - z$.

$$\int_\gamma \mathbf{F}d\mathbf{r} = U(3,0,-4\pi) - U(3,0,0) = \underline{4\pi}.$$

   Men det går även att beräkna kurvintegralen direkt.

5. Kroppen kan beskrivas som

$$\{(x,y,z) : 0 \le z \le xy,\ (x,y) \in D\}$$

med halcirkelskivan $D = \{(x,y) : (x-a)^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge 0\}$.

$$V = \iint_D \int_0^{xy} 1\,dz\,dxdy = \left[\begin{array}{l} x = a + r\cos t \\ y = r\sin t \end{array}\right] = \int_0^a \int_0^\pi r^2(a + r\cos t)\sin t\,dtdr = \ldots = \underline{\frac{2}{3}a^4}.$$