MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys IV
111222

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Sätt $f(x) = e^x - 1$. Avgör för var och en av de båda serierna $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ och $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ om serien är konvergent eller divergent. 6 p

   b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $(1-x^2)y'' - 3xy' - y = 0$ med bivillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. 6 p

2. Motivera först att funtionen $t - \frac{1}{t}$ är strängt växande från $-\infty$ till ∞ i intervallet $0 < t < \infty$, och visa sedan att $x = t - \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t}$, $0 < t < \infty$, är en parameterframställning av funktionskurvan $y = \sqrt{4 + x^2}$, $-\infty < x < \infty$. Låt D vara området $x \geq 0$, $y \geq \frac{5}{3}x$, $y \leq \sqrt{4+x^2}$. Beräkna arean av D. Beräkna också dubbelintegralen $\iint_D y^2\, dxdy$. 8 p

3. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma 3xyz^2\, dx + (x^6 + xz^3)\, dy + 6x^5 y\, dz$ där γ är den del av skärningskurvan mellan klotytorna $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ och $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ som ligger i området $y \geq 0$ och γ:s riktning är sådan att x växer då (x, y, z) genomlöper γ i dess riktning. 8 p

4. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$ där Y är den del av ytan $2x^2 + y^2 = 1 + z^2$ där $x \leq z \leq 1 + x$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$. 8 p

5. Låt M vara mängden av alla enkla slutna styckvis C^1-kurvor γ i planet sådana att γ har positiv omloppsriktning och inte går genom origo. Bestäm supremumvärdet för var och en av kurvintegralerna

$$\int_\gamma \left(3xy^2 + y^3\right)\, dx + \left(6x - 2x^3\right)\, dy,$$

$$\int_\gamma \left(-\frac{y}{x^2+y^2} + 3xy^2 + y^3\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + 6x - 2x^3\right) dy$$

$$\text{och} \quad \int_\gamma \left(\frac{y}{x^2+y^2} + 3xy^2 + y^3\right) dx + \left(-\frac{x}{x^2+y^2} + 6x - 2x^3\right) dy$$

   för kurvor γ i M. Avgör också i vart och ett av dessa fall om det finns någon kurva γ i M för vilken supremumvärdet antas. 8 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 12 p

7. (Absolutkonvergens medför konvergens.) Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

   12 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning må 2/1 kl 12.05-12.20 i rum 328 hus 6, därefter i rum 204 hus 6.