Lösningar till Matematisk analys IV, 111222

1. 1. a) Serien $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ är en positiv serie. Eftersom $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ då $x \to 0$ gäller att

$$\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1 \neq 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty$$

och eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ är en positiv divergent standardserie följer av ett jämförelsekriterium för positiva serier att $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ är divergent.

Vi betraktar nu serien $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. Enligt Taylorutvecklingen av e^x kring punkten 0 gäller att $f(x) = e^x - 1 = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + O(x^4)$ då x är nära 0, och allså har vi att

$$f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^{3n}}{n^{3/2}} + O\left(\frac{(-1)^{4n}}{n^2}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\left(1 + O\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

då n är stort. Sätt $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{1}{n}$ och $c_n = f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$ för $n = 1, 2, \ldots$. Då gäller att $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n + c_n)$ och att $c_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\left(1 + O\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$ då n är stort. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är en alternerande serie som är konvergent enligt Leibniz kriterium. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är en positiv divergent standardserie. För stora n är $c_n \big/ \frac{1}{n^{3/2}} = (-1)^n\left(1 + O\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$ och således $|c_n| \big/ \frac{1}{n^{3/2}} = \left|1 + O\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\right|$ och alltså gäller att $|c_n| \big/ \frac{1}{n^{3/2}} \to 1 \neq 0$ då $n \to \infty$, och eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ är en positiv konvergent standardserie följer av ett jämförelsekriterium för positiva serier att serien $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ är konvergent, och följaktligen att serien $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ är konvergent eftersom absolutkonvergens medför konvergens. Enligt allmänna satser för serier får vi sedan slutligen att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenta medför $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + c_n)$ konvergent, samt att $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + c_n)$ konvergent och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent medför $\sum_{n=1}^{\infty}((a_n + c_n) + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n + c_n)$ divergent. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ är allså divergent.

b) I enlighet med problemtexten ansätter vi att

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \text{ och att } y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}.$$

Insättning i givna differentialekvationen ger sedan att

$$(1) \qquad (1 - x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 3x\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Men

$$(1 - x^2)\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k$$

och

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1}}_{\text{Sätt } \ell = k-2} =$$

$$= \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1)a_{\ell+2}x^{\ell}}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k,$$

samt

$$3x\sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 3k a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(3k+1)a_k x^k.$$

Sambandet (1) kan därför skrivas

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((k+2)(k+1)a_{k+2} - \underbrace{\big(k(k-1)+3k+1\big)}_{=(k+1)^2} a_k\Big)x^{k+1} = 0,$$

dvs vi har att

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big((k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)^2 a_k\Big)x^{k+1} = 0.$$

Vi får således att

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)^2 a_k = 0 \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots$$

och alltså att

$$a_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}a_k \quad \text{för} \quad k = 0, 1, \ldots \ .$$

Av

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots \quad \text{och} \quad y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + \ldots$$

samt $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$, får vi vidare att $a_0 = 1$ och $a_1 = 0$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \ldots$ således att

(2)
$$a_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}a_k, \quad k = 0, 1, \ldots$$

samt

$$a_0 = 1 \quad \text{och} \quad a_1 = 0.$$

Av $a_1 = 0$ och (2) följer att $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$. Av $a_0 = 1$ och (2) följer att

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}, \\ a_4 &= \frac{3}{4}\,a_2 = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \\ a_6 &= \frac{5}{6}\,a_4 = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \\ &\ \vdots\ , \end{aligned}$$

dvs. att

$$a_{2k} = \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2k-1)\cdot 2k}{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2k)^2} =$$

$$= \frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot (1\cdot 2\cdot \ldots \cdot k)^2} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot (k!)^2} \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Notera här också att formeln för a_{2k} även stämmer för $k = 0$. Den sökta potensserielösningen är alltså

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} x^{2k}. \tag{3}$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_k = \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} x^{2k}.$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} = \frac{(2(k+1))!}{2^{2(k+1)} \cdot ((k+1)!)^2} |x|^{2(k+1)} \cdot \frac{2^{2k} \cdot (k!)^2}{(2k)!} \frac{1}{|x|^{2k}} =$$

$$= \frac{(2k+1)(2k+2)}{2^2(k+1)^2} |x|^2 = \frac{2k+1}{2(k+1)} |x|^2 \to |x|^2 = \frac{2+\frac{1}{k}}{2+\frac{2}{k}} |x|^2 \to |x|^2 \quad \text{då} \quad k \to \infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (3) är absolutkonvergent om $|x|^2 < 1$ och divergent om $|x|^2 > 1$. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent om $|x| < 1$ och divergent om $|x| > 1$, och följaktligen är potensserielösningens konvergensradie 1 (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen i intervallet $-1 < x < 1$).

2. Derivering visar att $\frac{d}{dt}\left(t - \frac{1}{t}\right) = 1 + \frac{1}{t^2} > 0$ för alla $t > 0$. Funktionen $t - \frac{1}{t}$ är alltså strängt växande i intervallet $t > 0$, och eftersom $t - \frac{1}{t} \to -\infty$ då $t \to 0^+$ och $t - \frac{1}{t} \to \infty$ då $t \to \infty$, är funtionen $t - \frac{1}{t}$ strängt växande från $-\infty$ till ∞ i intervallet $0 < t < \infty$. Vidare ger $x = t - \frac{1}{t}$ att

$$y = \sqrt{4 + x^2} = \sqrt{4 + \left(t - \frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{4 + t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} = t + \frac{1}{t}$$

för alla $t > 0$. Således är $x = t - \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t}$, $0 < t < \infty$ en parameterframställning av funktionskurvan $y = \sqrt{4 + x^2}$, $-\infty < x < \infty$.

Vi har alltså en enkel parameterframställning av funktionskurvan $y = \sqrt{4 + x^2}$, $-\infty < x < \infty$. Räta linjer kan enkelt parameterframställes. Randkurvorna till området D kan följaktligen enkelt parameterframställas. Vi kan därför använda Greens formel för att beräkna de båda sökta dubbelintegralerna. Låt γ vara den positivt orienterade randkurvan till området D. Då gäller att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy$$

om $P, Q \in C^1(D)$. Om $P(x,y)$ och $Q(x,y)$ är sådana att $Q_1'(x,y) - P_2'(x,y) = 1$ är dubbelintegralen $\iint_D (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy = \text{area}(D)$ och om $Q_1'(x,y) - P_2'(x,y) = y^2$ är dubbelintegralen $\iint_D (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy = \iint_D y^2\,dxdy$. Ett val av P och Q för vilka $Q_1'(x,y) - P_2'(x,y) = 1$ är t.ex. $P(x,y) = 0$ och $Q(x,y) = x$, och ett val av P och Q för vilka $Q_1'(x,y) - P_2'(x,y) = y^2$ är t.ex. $P(x,y) = 0$ och $Q(x,y) = xy^2$. Vi har alltså att

$$\int_\gamma x\,dy = \text{area}(D), \tag{4}$$

och att

$$\int_\gamma xy^2\,dy = \iint_D y^2\,dxdy. \tag{5}$$

Insättning av $x = 0$ i $y = \sqrt{4 + x^2}$ ger $y = 2$, och insättning av $y = \frac{5}{3}x$ i $y = \sqrt{4 + x^2}$ ger $\frac{5}{3}x = \sqrt{4 + x^2}$ $\iff \frac{25}{9}x^2 = 4 + x^2$ där $x > 0 \iff x = \frac{3}{2}$. Låt γ_1 vara funktionskurvan $y = \sqrt{4 + x^2}$ från punkten $(0, 2)$

till punkten $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, låt γ_2 vara räta linjen $x = 0$ från origo till punkten $(0, 2)$ och låt γ_3 vara räta linjen $y = \frac{5}{3}x$ från origo till punkten $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$. Då är $\gamma = (-\gamma_1) \cup (-\gamma_2) \cup \gamma_3$. Insättning av $x = 0$ och sedan av $x = \frac{3}{2}$ i $x = t - \frac{1}{t}$ där $t > 0$ ger $t = 1$ respektive $t = 2$. En parameterframställning av γ_1 är således $x = t - \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t}$, $1 \le t \le 2$, en parameterframställning av γ_2 är $x = 0$, $y = t$, $0 \le t \le 2$, och en parameterframställning av γ_3 är $x = t$, $y = \frac{5}{3}t$, $0 \le t \le \frac{3}{2}$. Med (4) ger dessa parameterframställningar

$$\operatorname{area}(D) = \int_\gamma x\,dy = -\int_{\gamma_1} x\,dy - \int_{\gamma_2} x\,dy + \int_{\gamma_3} x\,dy =$$

$$= -\int_1^2 \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt - 0 + \int_0^{3/2} t \cdot \frac{5}{3}\,dt = \int_1^2 \left(-t + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^3}\right) dt + \frac{5}{3}\int_0^{3/2} t\,dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2\ln|t| + \frac{1}{2t^2}\right]_1^2 + \frac{5}{3}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{3/2} = 2\ln 2,$$

och med (5) ger dessa parameterframställningar

$$\iint_D y^2\,dxdy = \int_\gamma xy^2\,dy = -\int_{\gamma_1} xy^2\,dy - \int_{\gamma_2} xy^2\,dy + \int_{\gamma_3} xy^2\,dy =$$

$$= -\int_1^2 \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)^2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt - 0 + \int_0^{3/2} t \cdot \left(\frac{5}{3}t\right)^2 \frac{5}{3}\,dt =$$

$$\left(\text{Använd att } \left(t - \frac{1}{t}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)^2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) = \frac{t^2 - 1}{t} \cdot \frac{(t^2+1)^2}{t^2} \cdot \frac{t^2 - 1}{t^2} = \right.$$

$$\left. = \frac{\left((t^2-1)(t^2+1)\right)^2}{t^5} = \frac{(t^4-1)^2}{t^5} = \frac{t^8 - 2t^4 + 1}{t^5} = t^3 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^5}.\right)$$

$$= \int_1^2 \left(-t^3 + \frac{2}{t} - \frac{1}{t^5}\right) dt + \frac{125}{27}\int_0^{3/2} t^3\,dt =$$

$$= \left[-\frac{1}{4}t^4 + 2\ln|t| + \frac{1}{4t^4}\right]_1^2 + \frac{125}{27}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^{3/2} = 2\ln 2 + \frac{15}{8}.$$

3. Vi beräknar kurvintegralen genom att använda Stokes sats. Först bestämmer vi skärningskurvan Γ mellan klotytorna $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ och $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$. Vi har att $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ och att $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, varav följer att $z = x$. Insättning av $z = x$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ ger att $x^2 + y^2 + x^2 = 2x \iff 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Skärningskurvan Γ mellan klotytorna är alltså kurvan bestående av alla (x, y, z) sådana att $z = x$ och $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$. Kurvan γ i uppgiften är den del av denna kurva Γ där $y \ge 0$ och γ:s riktning är sådan att x växer då (x, y, z) genomlöper γ i dess riktning. Kurvan γ är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Vi gör på följande sätt. Skärningspunkterna mellan kurvan Γ och planet $y = 0$ är de (x, y, z) för vilka $y = 0$, $z = x$ och $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, dvs punkterna $(0, 0, 0)$ och $(1, 0, 1)$. Låt γ_1 vara skärningskurvan mellan planen $z = x$ och $y = 0$ från punkten $(0, 0, 0)$ till punkten $(1, 0, 1)$, dvs räta linjen från punkten $(0, 0, 0)$ till punkten $(1, 0, 1)$ Låt också Y vara den del av planet $z = x$ där $2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$, $y \ge 0$. Kurvan $(-\gamma) \cup \gamma_1$ är då en sluten kurva vars projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning, och $(-\gamma) \cup \gamma_1$ är randkurvan till ytan Y. En parametrisering av ytan Y är $x = u$, $y = v$, $z = u$, $2\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{2}$, $v \ge 0$. Med $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, u)$ får vi att

$$\mathbf{r}_1'(u, v) = (1, 0, 1), \quad \mathbf{r}_2'(u, v) = (0, 1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u, v) \times \mathbf{r}_2'(u, v) = (-1, 0, 1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}'_1(u,v) \times \mathbf{r}'_2(u,v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Med dessa beteckningar har vi att

$$(6) \qquad -\int_\gamma 3xyz^2\,dx + (x^6 + xz^3)\,dy + 6x^5y\,dz + \int_{\gamma_1} 3xyz^2\,dx + (x^6 + xz^3)\,dy + 6x^5y\,dz =$$

$$= \int_{(-\gamma)\cup\gamma_1} 3xyz^2\,dx + (x^6 + xz^3)\,dy + 6x^5y\,dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_Y \left(\nabla \times \left(3xyz^2, x^6 + xz^3, 6x^5y\right)\right) \cdot \mathbf{N}\,dS =$$

$$= \iint_Y (6x^5 - 3xz^2, -(30x^4y - 6xyz), 6x^5 + z^3 - 3xz^2) \cdot \mathbf{N}\,dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y.)

$$= + \iint_{2\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{2}, v \geq 0} \left(6u^5 - 3u^3, -(30u^4v - 6u^2v), 6u^5 + u^3 - 3u^3\right) \cdot (-1, 0, 1)\,dudv =$$

$$= \iint_{2\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{2}, v \geq 0} u^3\,dudv =$$

(Gör substitutionen $s = \sqrt{2}\left(u - \frac{1}{2}\right)$, $t = v \iff u = \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{2}$, $v = t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $2\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{2}$, $v \geq 0$ övergår i $s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2}$, $t \geq 0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}, t \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{2}\right)^3 \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}, t \geq 0} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}s^3 + \frac{3}{4}s^2 + \frac{3}{4\sqrt{2}}s + \frac{1}{8}\right) dsdt =$$

(Eftersom $\frac{1}{2\sqrt{2}}s^3 + \frac{3}{4\sqrt{2}}s$ är udda i s och området $s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2}$, $t \geq 0$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}, t \geq 0} \left(\frac{3}{4}s^2 + \frac{1}{8}\right) dsdt = \frac{1}{8\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}, t \geq 0} \left(6s^2 + 1\right) dsdt =$$

(Eftersom $6s^2 + 1$ är jämn i t och området $s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2}$ är symmetriskt kring $t = 0$.)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}} \left(6s^2 + 1\right) dsdt = \frac{1}{16\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}} \left(6s^2 + 1\right) dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \leq \frac{1}{2}$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}} \left(6 \cdot \frac{1}{2}(s^2 + t^2) + 1\right) dsdt = \frac{1}{16\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq \frac{1}{2}} \left(3(s^2 + t^2) + 1\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \frac{1}{16\sqrt{2}} \iint_{\substack{0\le r\le \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0\le\theta<2\pi}} \left(3r^2+1\right) r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(3r^3+r\right)\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \left[\frac{3}{4}r^4 + \frac{1}{2}r^2\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{7\pi}{128\sqrt{2}}$$

En parametrisering av γ_1 är $(x,y,z) = t(1,0,1)$, $0 \le t \le 4$, dvs $x = t$, $y = 0$, $z = t$, $0 \le t \le 1$, och den ger att

$$\int_{\gamma_1} 3xyz^2\,dx + (x^6 + xz^3)\,dy + 6x^5y\,dz = 0 \tag{7}$$

Av (6) och (7) följer att

$$\int_{\gamma} 3xyz^2\,dx + (x^6 + xz^3)\,dy + 6x^5y\,dz = -\frac{7\pi}{128\sqrt{2}}.$$

4. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = x$ där $2x^2+y^2 \le 1+z^2$, och låt Y_2 vara den del av planet $z = 1+x$ där $2x^2+y^2 \le 1+z^2$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1 och $\mathbf{N}_2$ den utåtriktade enhetsnormalen till Y_2, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1\,dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz. \tag{8}$$

På ytan Y_1 är $\mathbf{F} = (x^3, y^3, x^3)$ och $\mathbf{N}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. Dvs $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1 = 0$ på hela Y_1, och alltså är

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_1\,dS = 0 \tag{9}$$

Insättning av $z = 1+x$ i $2x^2+y^2 = 1+z^2$ ger att $2x^2+y^2 = 1+(1+x)^2 \iff (x-1)^2+y^2 = 3$. Ytan Y_2 är allså den del av planet $z = 1+x$ där $(x-1)^2+y^2 \le 3$. En parametrisering av ytan Y_2 är $x = u$, $y = v$, $z = 1+u$, där $(u-1)^2+v^2 \le 3$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, 1+u\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,1), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v) = (-1,0,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_2 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}_2\,dS = \iint_{Y_2} (x^3, y^3, z^3)\cdot\mathbf{N}\,dS = \tag{10}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_2.)

$$= + \iint_{(u-1)^2+v^2\le 3} \big(u^3, v^3, (1+u)^3\big)\cdot(-1,0,1)\,dudv =$$

$$= \iint_{(u-1)^2+v^2\le 3} \big(-u^3 + (1+u)^3\big)\,dudv = \iint_{(u-1)^2+v^2\le 3} (3u^2+3u+1)\,dudv =$$

(Gör substitutionen $s = u-1$, $t = v \iff u = s+1$, $v = t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = 1$, och $(u-1)^2+v^2 \le 3$ övergår i $s^2+t^2 \le 3$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 3} \big(3(s+1)^2 + 3(s+1) + 1\big)|1|\,dsdt = \iint_{s^2+t^2\le 3} \big(3s^2+9s+7\big)\,dsdt =$$

(Eftersom $9s$ är udda i s och området $s^2+t^2 \le 3$ är symmetriskt kring $s=0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 3} \left(3s^2+7\right)\, dsdt =$$

(Eftersom området $s^2+t^2 \le 3$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 3} \left(3\cdot\frac{1}{2}(s^2+t^2)+4\right)\, dsdt = \iint_{s^2+t^2\le 3} \left(\frac{3}{2}(s^2+t^2)+4\right)\, dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s=r\cos\theta$, $t=r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{3}\\ 0\le\theta<2\pi}} \left(\frac{3}{2}r^2+7\right) r\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{2}r^3+7r\right)\, dr = 2\pi\left[\frac{3}{8}r^4+\frac{7}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{111\pi}{4}.$$

Vidare är $\nabla\cdot\mathbf{F} = 3(x^2+y^2+z^2)$ och D är mängden $2x^2+y^2 \le 1+z^2$, $x\le z\le 1+x$, och vi får att

(11) $$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dxdydz = 3\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz =$$

(Gör substitutionen $u=x$, $v=y$, $w=z-x \iff x=u$, $y=v$, $z=u+w$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)}=1$, och $(x,y,z)\in D$ övergår i $(u,v,w)\in\Omega$ där Ω är mängden $2u^2+v^2\le 1+(u+w)^2$, $0\le w\le 1 \iff$ $u^2-2uw+v^2\le 1+w^2$, $0\le w\le 1 \iff (u-w)^2+v^2\le 1+2w^2$, $0\le w\le 1$.)

$$= 3\iiint_\Omega \left(u^2+v^2+(u+w)^2\right)|1|\, dudvdw = 3\iiint_\Omega (2u^2+2uw+v^2+w^2)\, dudvdw =$$

$$= 3\int_0^1 \left(\iint_{(u-w)^2+v^2\le 1+2w^2} (2u^2+2uw+v^2+w^2)\, dudv\right) dw$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

(12) $$\iint_{(u-w)^2+v^2\le 1+2w^2} (2u^2+2uw+v^2+w^2)\, dudv =$$

(Gör substitutionen $s=u-w$, $t=v \iff u=s+w$, $v=t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)}=1$, och $(u-w)^2+v^2\le 1+2w^2$ övergår i $s^2+t^2\le 1+2w^2$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1+2w^2} \left(2(s+w)^2+2(s+w)w+t^2+w^2\right)|1|\, dsdt =$$

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1+2w^2} (2s^2+6sw+t^2+5w^2)\, dsdt =$$

(Eftersom $6sw$ är udda i s och området $s^2+t^2\le 1+2w^2$ är symmetriskt kring $s=0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1+2w^2} (2s^2+t^2+5w^2)\, dsdt =$$

(Eftersom området $s^2+t^2\le 1+2w^2$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1+2w^2} \left(2\cdot\frac{1}{2}(s^2+t^2)+\frac{1}{2}(s^2+t^2)+5w^2\right) dsdt =$$

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1+2w^2} \left(\frac{3}{2}(s^2+t^2)+5w^2\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{1+2w^2}\\ 0\le\theta<2\pi}} \left(\frac{3}{2}r^2 + 5w^2\right) r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{1+2w^2}} \left(\frac{3}{2}r^3 + 5w^2 r\right) dr =$$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{8}r^4 + \frac{5w^2}{2}r^2\right]_0^{\sqrt{1+w^2}} = 2\pi\left(\frac{3}{8}(1+2w^2)^2 + \frac{5}{2}w^2(1+2w^2)\right) = \pi\left(13w^4 + 8w^2 + \frac{3}{4}\right)$$

Insättning av (12) i (11) ger att

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = 3\pi\int_0^1\left(13w^4 + 8w^2 + \frac{3}{4}\right) dw = 3\pi\left[\frac{13}{5}w^5 + \frac{8}{3}w^2 + \frac{3}{4}w\right]_1^2 = \frac{361\pi}{20}. \tag{13}$$

Av (8), (9) och (10) och (13) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{361\pi}{20} - \frac{111\pi}{4} = -\frac{97\pi}{10}.$$

5. För en godtycklig kurva γ i M sätt

$$a(\gamma) = \int_\gamma \left(3xy^2 + y^3\right) dx + \left(6x - 2x^3\right) dy,$$

$$b(\gamma) = \int_\gamma \left(-\frac{y}{x^2+y^2} + 3xy^2 + y^3\right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} + 6x - 2x^3\right) dy$$

$$c(\gamma) = \int_\gamma \left(\frac{y}{x^2+y^2} + 3xy^2 + y^3\right) dx + \left(-\frac{x}{x^2+y^2} + 6x - 2x^3\right) dy$$

$$\text{och}\quad d(\gamma) = \int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Då gäller att $b(\gamma) = a(\gamma) + d(\gamma)$ och att $c(\gamma) = a(\gamma) - d(\gamma)$. För en godtycklig kurva γ i M låt vidare $\Omega(\gamma)$ beteckna det slutna begränsade område i planet vars randkurva är γ.

Vi börjar med att beräkna supremumvärdet av $a(\gamma)$ för kurvor i M. Enligt Greens formel gäller att

$$a(\gamma) = \int_\gamma \left(3xy^2 + y^3\right) dx + \left(6x - 2x^3\right) dy = \iint_{\Omega(\gamma)} \left(6 - 6x^2 - (6xy + 3y^2)\right) dxdy =$$

$$= 3\iint_{\Omega(\gamma)} \left(2 - x^2 - (x+y)^2\right) dxdy. \tag{14}$$

Dubbelintegralen i (15) har ett största värde som antas precis då området $\Omega(\gamma)$ är ellipsområdet $2 - x^2 - (x+y)^2 \ge 0 \iff x^2 + (x+y)^2 \le 2$, dvs precis då kurvan γ är ellipsen $x^2 + (x+y)^2 = 2$ med positiv orientering, vilket är en kurva i M. Största värdet är

$$3\iint_{x^2+(x+y)^2\le 2} \left(2 - x^2 - (x+y)^2\right) dxdy =$$

(Gör substitutionen $u = x$, $v = x + y \iff x = u$, $y = -u + v$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1$, och $x^2 + (x+y)^2 \le 2$ övergår i $u^2 + v^2 \le 2$.)

$$= 3\iint_{u^2+v^2\le 2} \left(2 - u^2 - v^2\right)|1|\,dudv = 3\iint_{u^2+v^2\le 2} \left(2 - u^2 - v^2\right) dudv =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= 3\iint_{\substack{0\le r\le\sqrt{2}\\0\le\theta<2\pi}} (2-r^2)r\,dr\,d\theta = 6\pi\int_0^{\sqrt{2}} \left(2r-r^3\right)\,dr = 6\pi\left[r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^{\sqrt{2}} = 6\pi.$$

Supremumvärdet av $a(\gamma)$ för kurvor γ i M är alltså 6π, supremumvärdet antas och fås precis då γ är ellipsen $x^2+(x+y)^2=2$ med positiv orientering.

Vi övergår nu till att beräkna de andra sökta supremumvärdena. Låt γ_1 vara ellipsen $x^2+(x+y)^2=2$ med positiv orientering. Enligt ovan gäller att

$$a(\gamma)\le 6\pi \text{ för alla } \gamma\in M, \text{ och } a(\gamma)=6\pi \text{ precis då } \gamma=\gamma_1. \tag{15}$$

Vi har också att

$$d(\gamma)=\begin{cases} 2\pi \text{ för varje kurva } \gamma\in M \text{ som omsluter origo,}\\ 0 \text{ för varje kurva } \gamma\in M \text{ som inte omsluter origo.}\end{cases} \tag{16}$$

Vi visar (16) nedan. Av (15) och (16) följer att $b(\gamma)=a(\gamma)+d(\gamma)\le 6\pi+2\pi=8\pi$ för alla $\gamma\in M$ och också att $b(\gamma_1)=a(\gamma_1)+d(\gamma_1)=6\pi+2\pi=8\pi$ eftersom γ_1 omsluter origo. Supremumvärdet av $b(\gamma)$ för kurvor $\gamma\in M$ är alltså 8π och supremumvärdet antas för $\gamma=\gamma_1$. Av (15) och (16) följer också att $c(\gamma)=a(\gamma)-d(\gamma)\le 6\pi-0=6\pi$ för alla $\gamma\in M$, och att $c(\gamma)=6\pi$ precis om både $a(\gamma)=6\pi$ och $d(\gamma)=0$. Men $a(\gamma)=6\pi$ för $\gamma\in M$ gäller endast då $\gamma=\gamma_1$ och $d(\gamma)=0$ för $\gamma\in M$ gäller endast då γ inte omsluter origo. Eftersom γ_1 omsluter origo finns det således ingen kurva $\gamma\in M$ för vilken $c(\gamma)=6\pi$. Följaktligen har vi att

$$c(\gamma)<6\pi \text{ för alla } \gamma\in M. \tag{17}$$

Det finns dock kurvor γ i M sådana att $c(\gamma)$ är godtyckligt nära 6π. En uppsättning sådana kurvor kan t.ex. fås med följande konstruktion. Punkten $P=\left(-\frac{1}{2},0\right)$ är en punkt i det inre av kurvan γ_1. För godtyckligt $\epsilon\in]0,1]$ låt Q vara skärningspunkten i första kvadranten mellan räta linjen $y=\epsilon$ och ellipsen $x^2+(x+y)^2=2$, och låt R vara skärningspunkten i fjärde kvadranten mellan räta linjen $y=-\epsilon$ och ellipsen $x^2+(x+y)^2=2$. Låt γ_ϵ vara räta linjen från punkten P till punkten Q, ellipsen $x^2+(x+y)^2=2$ moturs från punkten Q till punkten R, samt räta linjen från punkten R till punkten P. Då är γ_ϵ en kurva i M som inte omsluter origo. Sätt också $\Omega'=\Omega(\gamma_1)\setminus\{(x,0)\mid -\frac{1}{2}\le x\le 1\}$. Då gäller att

$$\begin{aligned} c(\gamma_\epsilon)=a(\gamma_\epsilon)-d(\gamma_\epsilon)=a(\gamma_\epsilon)&=\int_{\gamma_\epsilon}\left(3xy^2+y^3\right)\,dx+\left(6x-2x^3\right)\,dy=\\ =3\iint_{\Omega(\gamma_\epsilon)}\left(2-x^2-(x+y)^2\right)dxdy&\to 3\iint_{\Omega'}\left(2-x^2-(x+y)^2\right)dxdy=\\ =3\iint_{\Omega(\gamma_1)}\left(2-x^2-(x+y)^2\right)dxdy&=6\pi \quad \text{då} \quad \epsilon\to 0^+. \end{aligned} \tag{18}$$

Ovan gäller andra likheten eftersom γ_ϵ inte omsluter origo, fjärde likheten följer av Greens formel, och femte likheten gäller eftersom Ω' och $\Omega(\gamma_1)$ är lika sånär som på en tvådimensionell nollmängd. Av (17) och (18) följer att supremumvärdet av $c(\gamma)$ för kurvor γ i M är 6π och att supremumvärdet inte antas.

Det återstår att visa (16) och det gör vi nu. Vi har att $d(\gamma)=\int_\gamma p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy$ där $p(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}$ och $q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. Funktionerna $p(x,y)$ och $q(x,y)$ är definierade för alla $(x,y)\ne(0,0)$, och derivering ger att $q_1'(x,y)-p_2'(x,y)=0$ för alla $(x,y)\ne(0,0)$. För en godtycklig kurva γ i M som inte omsluter origo ger därför Greens formel att

$$d(\gamma)=\int_\gamma p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=\iint_{\Omega(\gamma)}(q_1'(x,y)-p_2'(x,y))\,dxdy=0.$$

Låt nu γ vara en godtycklig kurva i M som omsluter origo. För $r>0$ låt Γ_r vara cirkeln $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, $0\le t<2\pi$, och låt $r>0$ vara så litet att Γ_r helt ligger i det inre av γ. Låt vidare E vara området mellan Γ_r och γ. Enligt Greens formel gäller då att

$$d(\gamma)-d(\Gamma_r)=\int_\gamma p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy-\int_{\Gamma_r}p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=\iint_E(q_1'(x,y)-p_2'(x,y))\,dxdy=0,$$

och eftersom

$$\int_{\Gamma_r} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{r\sin t}{r^2}(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2} r\cos t \right)\,dt = \int_0^{2\pi} \,dt = 2\pi,$$

har vi att $d(\gamma) = 2\pi$ i detta fall. Detta visar (16).

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.