MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys IV
120109

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Avgör för var och en av de båda generaliserade integralerna $\int_1^\infty \frac{\cos(\sin x)}{x}\,dx$ och $\int_1^\infty \frac{\sin(\cos x)}{x}\,dx$ om integralen är konvergent eller divergent. 6 p

   b) Bestäm, som en potensserie kring origo, lösningen $y(x)$ till differentialekvationen $y''' + 4x^2y' + 12xy = 0$ med bivillkoren $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ och $y''(0) = 2$. Ange också konvergensradien för den erhållna potensserielösningen. Den erhållna lösningen $y(x)$ är en viss elementär funktion. Vilken? 6 p

2. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (-y^3 + z^2)\,dx + (x^3y^3 + x^2 + 3z^2)\,dy + (10z^4 + 2xz + 6yz)\,dz$ där γ är den del av skärningskurvan mellan funktionsytan $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ och cylinderytan $3x^2 + 4y^2 = 4$ som ligger i området $x \geq 0$ och γ:s riktning är sådan att y växer då (x, y, z) genomlöper γ i dess riktning. 8 p

3. Låt D vara området $z \leq 1+x$, $z \geq 1-x$, $z \geq \sqrt{2x^2 + 2y^2}$. Bestäm arean av begränsningsytan till området D. 8 p

4. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$ där $z \leq 2+y$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F} = (x, y^2, z^3)$. 8 p

5. Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma (-4x^2y + xyz + z^2 + y)\,dx + (4xy^2 - x^2z - x + z)\,dy + 2xz\,dz$ för kurvor γ. Visa att kurvintegralen inte är oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$. Visa att kurvintegralen dock är oberoende av vägen för kurvor γ på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ förslagsvis genom att visa att kurvintegralen är 0 för varje enkel sluten kurva γ på cylinderytan. För en godtycklig punkt (a, b, c) på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ beräkna också kurvintegralens värde uttryckt i a, b och c då γ är en kurva på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1, 0, 0)$ på cylinderytan till punkten (a, b, c) på cylinderytan. 8 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. (Jämförelsekriterium I och II för positiva serier)

   (i) Antag att $\sum_{k=1}^\infty b_k$ är konvergent och att $0 \leq a_k \leq \alpha b_k$ för $k = 1, 2, \ldots$ för något tal $\alpha \geq 0$. Visa att då är även $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent.

   (ii) Antag att $a_k,\ b_k \geq 0$ för $k = 1, 2, \ldots$ och att $\frac{a_k}{b_k} \to A$ då $k \to \infty$ där $0 < A < \infty$. Visa att då är de båda serierna $\sum_{k=1}^\infty a_k$ och $\sum_{k=1}^\infty b_k$ konvergenta och divergenta samtidigt.

   12 p

7. (d'Alemberts kvotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^\infty a_k$ har nollskilda termer sådana att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to A \text{ då } k \to \infty, \text{ där } 0 \leq A \leq \infty.$$

   Visa att $\sum_{k=1}^\infty a_k$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$, och divergent om $1 < A \leq \infty$. 12 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning to 19/1 kl 12.00-12.15 i rum 328 hus 6, därefter i rum 204 hus 6.