Lösningar till Matematisk analys IV, 120109

1. a) *Den generaliserade integralen* $\int_1^\infty f(x)\,dx$ där $f(x) = \dfrac{\cos(\sin x)}{x}$:

   Den generaliserade integralen här är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är ∞. Eftersom $\sin x \in [-1,1]$ för alla $x \in \mathbf{R}$ och $\cos u \geq \cos 1 > 0$ för alla $u \in [-1,1]$ är $\cos(\sin x) \geq \cos 1 > 0$ för alla reella tal x. Den generaliserade integralen $\int_1^\infty f(x)\,dx$ här är alltså en positiv integral. Den visade olikheten visar också att $f(x) \geq \frac{\cos 1}{x}$ för alla $x \geq 1$ och eftersom $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ är en divergent positiv generaliserad standardintegral är $\int_1^\infty f(x)\,dx$ divergent enligt ett jämförelsekriterium för positiva integraler.

   Den generaliserade integralen $\int_1^\infty f(x)\,dx$ där $f(x) = \dfrac{\sin(\cos x)}{x}$:

   Den generaliserade integralen här är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är ∞. Funktionen $\sin(\cos x)$ är positiv i de intervall där $\cos x$ är positiv och negativ i de intervall där $\cos x$ är negativ, dvs positiv i intervallen $[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ för jämna heltal k och negativ i intervallen $[\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ för udda heltal k. Integralerna av den här givna funktionen $f(x)$ över intervallen $\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ för $k = 1, 2, \ldots$, intervall vars union är intervallet $[\frac{\pi}{2}, \infty[$, bildar således termerna i en alternerande serie som skulle kunna vara konvergent och här faktiskt är det. Att denna serie är konvergent ger sedan att $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty f(x)\,dx$ är konvergent och därmed att $\int_1^\infty f(x)\,dx$ är konvergent. Vi visar nu hur denna skiss kan genomföras. För ett godtyckligt heltal $n \geq 1$ har vi att

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{\pi}{2}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi f\left(x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right)\,dx$$

   och eftersom

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right)\sin x =$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right)\sin x = -(-1)^{k-1}\sin x = (-1)^k \sin x$$

   och alltså

$$f\left(x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right) = \frac{\sin\left(\cos\left(x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right)\right)}{x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi} =$$

$$= \frac{\sin\left((-1)^k \sin x\right)}{x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi} = (-1)^k \frac{\sin(\sin x)}{x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}$$

   får vi att

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \int_0^\pi \frac{\sin(\sin x)}{x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}\,dx.$$

   Sätt

$$a_k = \int_0^\pi \frac{\sin(\sin x)}{x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}\,dx \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots .$$

   Då gäller alltså att

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k. \tag{1}$$

Eftersom $\sin(\sin x) > 0$ för alla $x \in]0, \pi[$ är $a_k > 0$ för $k = 1, 2, \ldots$. För talen a_k har vi vidare att

$$a_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin x)}{x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}\, dx > \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin x)}{\frac{\pi}{2} + k\pi}\, dx >$$

$$> \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin x)}{x + \frac{\pi}{2} + k\pi}\, dx = a_{k+1} \quad \text{för } k = 1, 2, \ldots,$$

och att

$$0 < a_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin x)}{x + \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}\, dx < \int_0^{\pi} \frac{\sin(\sin x)}{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi}\, dx =$$

$$= \left(\int_0^{\pi} \sin(\sin x)\, dx \right) \frac{1}{\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi} \to 0 \quad \text{då } k \to \infty$$

och alltså att $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ är således en konvergent serie enligt Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier. Låt s vara denna konvergenta series summa. Talet s är då ett ändligt tal och det gäller att $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k \to s$ då $n \to \infty$. Med (1) ovan visar det att också

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + n\pi} f(x)\, dx \to s \text{ då } n \to \infty \tag{2}$$

Låt nu T vara ett godtyckligt tal $> \frac{3\pi}{2}$ och låt n_T vara det största heltalet sådant att $\frac{\pi}{2} + n_T\pi \leq T$. Då är $n_T \geq 1$ och det gäller att $T - \pi < \frac{\pi}{2} + n_T\pi \leq T$ och att

$$n_T \to \infty \text{ då } T \to \infty. \tag{3}$$

Vi har också att

$$\int_1^T f(x)\, dx = \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + n_T\pi} f(x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2} + n_T\pi}^{T} f(x)\, dx. \tag{4}$$

Vidare har vi att

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2} + n_T\pi}^{T} f(x)\, dx \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2} + n_T\pi}^{T} |f(x)|\, dx \leq \int_{T-\pi}^{T} |f(x)|\, dx = \int_{T-\pi}^{T} \frac{|\sin(\cos x)|}{x}\, dx \leq \tag{5}$$

$$\leq \int_{T-\pi}^{T} \frac{1}{x}\, dx < \int_{T-\pi}^{T} \frac{1}{T-\pi}\, dx = \frac{\pi}{T-\pi} \to 0 \quad \text{då } T \to \infty$$

Vid det andra olikhetstecknet i (5) har vi använt att $T - \pi < \frac{\pi}{2} + n_T\pi \leq T$ gäller. Av (2), (3), (4) och (5) följer att

$$\int_1^T f(x)\, dx \to \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx + s \quad \text{(ett ändligt tal)} \quad \text{då} \quad T \to \infty$$

Den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ här är således konvergent.

b) Vi ansätter

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

och eftersom potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1},\ y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \text{ och } y''' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3}.$$

Insättning i den givna differentialekvationen ger sedan att

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) a_k x^{k-3} + 4x^2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + 12x \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0 \tag{6}$$

Men

$$4x^2\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^{k-1}+12x\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty}4ka_kx^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}12a_kx^{k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(4ka_k+12a_k)x^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}4(k+3)a_kx^{k+1}$$

och

$$\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)(k-2)a_kx^{k-3}=\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)(k-2)a_kx^{k-3}=$$

$$=\underbrace{\sum_{k=3}^{\infty}k(k-1)(k-2)a_kx^{k-3}=}_{\text{Sätt } \ell=k-4}\underbrace{\sum_{\ell=-1}^{\infty}(\ell+4)(\ell+3)(\ell+2)a_{\ell+4}x^{\ell+1}=}_{\text{Byt } \ell \text{ mot } k}$$

$$=\sum_{k=-1}^{\infty}(k+4)(k+3)(k+2)a_{k+4}x^{k+1}=6a_3+\sum_{k=0}^{\infty}(k+4)(k+3)(k+2)a_{k+4}x^{k+1}.$$

Sambandet (6) kan därför skrivas

$$6a_3+\sum_{k=0}^{\infty}(k+4)(k+3)(k+2)a_{k+4}x^{k+1}+\sum_{k=0}^{\infty}4(k+3)a_kx^{k+1}=0$$

eller ekvivalent

$$6a_3+\sum_{k=0}^{\infty}\big((k+4)(k+3)(k+2)a_{k+4}+4(k+3)a_k\big)x^{k+1}=0.$$

Vi får således att

$$6a_3=0 \quad \text{och} \quad (k+4)(k+3)(k+2)a_{k+4}+4(k+3)a_k=0 \quad \text{för} \quad k=0,1,\ldots$$

och alltså att

$$a_3=0 \quad \text{och} \quad a_{k+4}=-\frac{4}{(k+4)(k+2)}a_k \quad \text{för} \quad k=0,1,\ldots\ .$$

Av

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=a_0+a_1x+\ldots, \quad y'=\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^{k-1}=a_1+2a_2x+\ldots \quad \text{och}$$

$$y''=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}=2a_2+6a_3x+\ldots,$$

samt $y(0)=0$, $y'(0)=0$ och $y''(0)=2$, får vi vidare att $a_0=0$, $a_1=0$ och $a_2=1$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0,a_1,\ldots$ således att

$$a_{k+4}=-\frac{4}{(k+4)(k+2)}a_k, \quad k=0,1,\ldots \tag{7}$$

samt

$$a_2=1 \quad \text{och} \quad a_0=a_1=a_3=0.$$

Av $a_0=0$, $a_1=0$ och $a_3=0$ samt (7) följer att

$$a_0=a_4=a_8=\ldots=0, \quad a_1=a_5=a_9=\ldots=0 \quad \text{och} \quad a_3=a_7=a_{11}=\ldots=0$$

dvs att

$$a_{4k}=a_{4k+1}=a_{4k+3}=0 \quad \text{för} \quad k=0,1,\ldots\ .$$

Av $a_2 = 1$ och (7) följer att

$$
\begin{aligned}
a_6 &= -\frac{4}{6\cdot 4}\,a_0 = -\frac{1}{3\cdot 2}\,a_0 = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3},\\
a_{10} &= -\frac{4}{10\cdot 8}\,a_4 = -\frac{1}{5\cdot 4}\,a_4 = (-1)^2\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5},\\
a_{14} &= -\frac{4}{14\cdot 12}\,a_8 = -\frac{1}{7\cdot 6}\,a_8 = (-1)^3\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7},\\
&\ \vdots,
\end{aligned}
$$

dvs att

$$
a_{4k+2} = (-1)^k\frac{1}{(2k+1)!} \quad \text{för} \quad k = 1, 2, \dots .
$$

Notera här också att formeln för a_{4k+2} även stämmer för $k = 0$. Den sökta potensserielösningen är alltså

$$
y = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{4k+2}. \tag{8}
$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$
b_k = (-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}x^{4k+2}
$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$
\begin{aligned}
\frac{|b_{k+1}|}{|b_k|} &= \frac{1}{\big(2(k+1)+1\big)!}|x|^{4(k+1)+2}\cdot(2k+1)!\cdot\frac{1}{|x|^{4k+2}} =\\
&= \frac{1}{(2k+2)(2k+3)}|x|^4 \to 0 \quad \text{då} \quad k \to \infty,
\end{aligned}
$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (8) är absolutkonvergent för alla x. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent för alla x, och följaktligen är potensserielösningens konvergensradie ∞ (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen på hela räta linjen. Vi noterar sedan slutligen att eftersom

$$
\sin u = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)!}u^{2k+1}
$$

så är den erhållna lösningen $y(x) = \sin(x^2)$.

2. Vi beräknar kurvintegralen genom att använda Stokes sats. Kurvan γ är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Vi gör på följande sätt. Skärningspunkterna mellan kurvan γ och planet $x = 0$ är de (x, y, z) för vilka $x = 0$, $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ och $3x^2 + 4y^2 = 4$, dvs punkterna $(0, -1, 1)$ och $(0, 1, 1)$. Låt γ_1 vara skärningskurvan mellan funktionsytan $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ och planet $x = 0$ från punkten $(0, -1, 1)$ till punkten $(0, 1, 1)$, dvs parabeln $z = y^2$, $x = 0$ från punkten $(0, -1, 1)$ till punkten $(0, 1, 1)$ Låt också Y vara den del av funktionsytan $z = \sqrt{x^4 + y^4}$ där $3x^2 + 4y^2 = 4$, $x \geq 0$. Kurvan $\gamma \cup (-\gamma_1)$ är då en sluten kurva vars projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning, och $\gamma \cup (-\gamma_1)$ är randkurvan till ytan Y. En parametrisering av ytan Y är $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^4 + v^4}$, $3u^2 + 4v^2 \leq 4$, $u \geq 0$. Med $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^4 + v^4})$ får vi att

$$
\mathbf{r}'_1(u,v) = \left(1, 0, \frac{2u^3}{u^4+v^4}\right), \quad \mathbf{r}'_2(u,v) = \left(0, 1, \frac{2v^3}{u^4+v^4}\right) \quad \text{och}
$$

$$\mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v) = \left(-\frac{2u^3}{u^4+v^4}, -, \frac{2v^3}{u^4+v^4}, 1\right),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v)\times\mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Med dessa beteckningar har vi att

$$\text{(9)}\quad \int_\gamma (-y^3+z^2)\,dx + (x^3y^3+x^2+3z^2)\,dy + (10z^4+2xz+6yz)\,dz$$
$$- \int_{\gamma_1} (-y^3+z^2)\,dx + (x^3y^3+x^2+3z^2)\,dy + (10z^4+2xz+6yz)\,dz =$$

$$= \int_{\gamma\cup(-\gamma_1)} (-y^3+z^2)\,dx + (x^3y^3+x^2+3z^2)\,dy + (10z^4+2xz+6yz)\,dz =$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_Y \left(\nabla\times\left(-y^3+z^2, x^3y^3+x^2+3z^2, 10z^4+2xz+6yz\right)\right)\cdot\mathbf{N}\,dS =$$

$$= \iint_Y (0,0,3x^2y^3+2x+3y^2)\cdot\mathbf{N}\,dS =$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y.)

$$= + \iint_{3u^2+4v^2\le 4, u\ge 0} \left(0,0,3u^2v^3+2u+3v^2\right)\cdot\left(-\frac{2u^3}{u^4+v^4}, -, \frac{2v^3}{u^4+v^4}, 1\right) dudv =$$

$$= \iint_{3u^2+4v^2\le 4, u\ge 0} (3u^2v^3+2u+3v^2)\,dudv =$$

(Eftersom $3u^2v^3$ är udda i v och området $3u^2+4v^2\le 4$, $u\ge 0$ är symmetriskt kring $v=0$.)

$$= \iint_{3u^2+4v^2\le 4, u\ge 0} (2u+3v^2)\,dudv =$$

(Gör substitutionen $s=\frac{\sqrt{3}}{2}u$, $t=v \iff u=\frac{2}{\sqrt{3}}s$, $v=t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)}=\frac{2}{\sqrt{3}}$, och $3u^2+4v^2\le 4$, $u\ge 0$ övergår i $s^2+t^2\le 1$, $s\ge 0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} \left(\frac{4}{\sqrt{3}}s+3t^2\right)\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right| dsdt =$$

$$= \frac{8}{3}\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\,dsdt + 2\sqrt{3}\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} t^2\ dsdt =$$

(Eftersom t^2 är jämn i s och området $s^2+t^2\le 1$ är symmetriskt kring $s=0$.)

$$= \frac{8}{3}\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\,dsdt + \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\iint_{s^2+t^2\le 1} t^2\,dsdt =$$

$$= \frac{8}{3}\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\,dsdt + \sqrt{3}\iint_{s^2+t^2\le 1} t^2\ dsdt =$$

(Eftersom området $s^2+t^2\le 1$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{1}{3}\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\,dsdt + \sqrt{3}\iint_{s^2+t^2\le 1}\frac{1}{2}(s^2+t^2)\ dsdt =$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} s\,dsdt + \frac{\sqrt{3}}{2}\iint_{s^2+t^2\le 1}(s^2+t^2)\ dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \frac{1}{3}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta<\frac{\pi}{2}}} (r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}} r^2\,r\,dr\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 r^2\,dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta + \sqrt{3}\,\pi\int_0^1 r^3\,dr =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1\left[\sin\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{3}\,\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}.$$

En parametrisering av γ_1 är $x = 0$, $y = t$, $z = t^2$, $-1 \le t \le 1$, och den ger att

$$\int_{\gamma_1}(-y^3+z^2)\,dx + (x^3y^3+x^2+3z^2)\,dy + (10z^4+2xz+6yz)\,dz = \tag{10}$$

$$= \int_{-1}^{1}\big(0 + 3t^4\cdot 1 + (10t^8+6t^3)\cdot 2t\big)\,dt = \int_{-1}^{1}(20t^9+15t^4)\,dt =$$

(Eftersom $20t^9$ är udda i t och $15t^4$ är jämn i t och intervallet $-1 \le t \le 1$ är symmetriskt kring $t = 0$.)

$$= \int_{-1}^{1}15t^4\,dt = 2\int_0^1 15t^4\,dt = \int_0^1 30t^4\,dt = \left[6t^5\right]_0^1 = 6$$

Av (11) och (12) följer att

$$\int_{\gamma}(-y^3+z^2)\,dx + (x^3y^3+x^2+3z^2)\,dy + (10z^4+2xz+6yz)\,dz = 6 + \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4} = \frac{56}{9} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{4}.$$

3. Låt Γ_1 vara skärningskurvan mellan planet $z = 1 + x$ och konytan $z = \sqrt{2x^2+2y^2}$ och låt Γ_2 vara skärningskurvan mellan planet $z = 1 - x$ och konytan $z = \sqrt{2x^2+2y^2}$. Insättning av $z = 1 + x$ i $z = \sqrt{2x^2+2y^2}$ ger $1 + x = \sqrt{2x^2+2y^2}$ varav fås $(1+x)^2 = 2x^2+2y^2 \iff 1+2x+x^2 = 2x^2+2y^2 \iff (x-1)^2+2y^2 = 2$, och insättning av $z = 1-x$ i $z = \sqrt{2x^2+2y^2}$ ger $1 - x = \sqrt{2x^2+2y^2}$ varav fås $(1-x)^2 = 2x^2+2y^2 \iff 1-2x+x^2 = 2x^2+2y^2 \iff (x+1)^2+2y^2 = 2$. Således består kurvan Γ_1 av alla punkter (x, y, z) sådana att $z = 1 + x$ och $(x-1)^2+2y^2 = 2$, och kurvan Γ_2 av alla punkter (x, y, z) sådana att $z = 1 - x$ och $(x+1)^2+2y^2 = 2$. Projektionen av Γ_1 på xy-planet är kurvan $(x-1)^2+2y^2 = 2$ i xy-planet, och projektionen av Γ_2 på xy-planet är kurvan $(x+1)^2+2y^2 = 2$ i xy-planet. Skärningslinjen mellan planen $z = 1 + x$ och $z = 1 - x$ ligger i planet $x = 0$. Låt E_1 vara området $(x-1)^2+2y^2 = 2$, $x \ge 0$ i xy-planet, och låt E_2 vara området $(x+1)^2+2y^2 = 2$, $x \ge 0$ i xy-planet. Begränsningsytan till området D består då av (rita figur) följande tre delytor: den del av planet $z = 1 + x$ där $(x, y) \in E_1$, den del av planet $z = 1 - x$ där $(x, y) \in E_2$ samt den del av konytan $z = \sqrt{2x^2+2y^2}$ där $(x, y) \in E_1 \setminus E_2$. Kalla dessa delytor för respektive Y_1, Y_2 och Y_3. Arean av en funktionsyta $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$ är $\iint_E \sqrt{1 + (f_1'(x,y))^2 + (f_2'(x,y))^2}\,dxdy$. Om $f(x, y) = 1 + x$ är $1+(f_1'(x,y))^2+(f_2'(x,y))^2 = 1+1+0 = 2$, om $f(x, y) = 1-x$ är $1+(f_1'(x,y))^2+(f_2'(x,y))^2 = 1+1+0 = 2$ och om $f(x, y) = \sqrt{2x^2+2y^2}$ är

$$1 + (f_1'(x,y))^2 + (f_2'(x,y))^2 = 1 + \left(\frac{2x}{\sqrt{2x^2+2y^2}}\right)^2 + \left(\frac{2y}{\sqrt{2x^2+2y^2}}\right)^2 = 1 + \frac{4x^2+4y^2}{2x^2+2y^2} = 3.$$

Vi får därför $\text{area}(Y_1) = \iint_{E_1} \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\, \text{area}(E_1)$, $\text{area}(Y_2) = \iint_{E_2} \sqrt{2}\, dxdy = \sqrt{2}\, \text{area}(E_2)$ samt $\text{area}(Y_3) = \iint_{E_1 \setminus E_2} \sqrt{3}\, dxdy = \sqrt{3}\, \text{area}(E_1 \setminus E_2) = \sqrt{3}\, (\text{area}(E_1) - \text{area}(E_2))$. Vid det sista likhetstecknet här har vi använt att $E_2 \subseteq E_1$. Låt A vara arean av begränsningsytan till D. Då gäller således att

$$
A = \text{area}(Y_1) + \text{area}(Y_2) + \text{area}(Y_3 =) \sqrt{2}\, \text{area}(E_1) + \sqrt{2}\, \text{area}(E_2) + \sqrt{3}\, (\text{area}(E_1) - \text{area}(E_2)) = \tag{11}
$$

$$
= \sqrt{2}\, \big(\text{area}(E_1) + \text{area}(E_2)\big) + \sqrt{3}\, \big(\text{area}(E_1) - \text{area}(E_2)\big).
$$

Vi slutför nu beräkningen av A genom att beräkna arean av E_1 och arean av E_2. Vi har att

$$
\text{area}(E_1) = \iint_{E_1} dxdy = \iint_{(x-1)^2+2y^2=2, x\geq 0} dxdy = \tag{12}
$$

(Gör substitutionen $u = x - 1$, $v = \sqrt{2}y \iff x = u + 1$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $(x-1)^2 + 2y^2 = 2$, $x \geq 0$ övergår i $u^2 + v^2 \leq 2$, $u \geq -1$.)

$$
= \iint_{u^2+v^2\leq 2, u\geq -1} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| dudv = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{area}(u^2 + v^2 \leq 2, u \geq -1) =
$$

(Eftersom området $u^2 + v^2 \leq 2$, $u \geq -1$ består av (rita figur) en cirkelsektor med radie $\sqrt{2}$ och öppningsvinkel $3\pi/2$ samt en halv kvadrat med sidlängd $\sqrt{2}$.)

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3\pi/2}{2\pi} \pi(\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2}\pi + 1 \right),
$$

och att

$$
\text{area}(E_2) = \iint_{E_2} dxdy = \iint_{(x+1)^2+2y^2=2, x\geq 0} dxdy = \tag{13}
$$

(Gör substitutionen $u = x + 1$, $v = \sqrt{2}y \iff x = u - 1$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $(x+1)^2 + 2y^2 = 2$, $x \geq 0$ övergår i $u^2 + v^2 \leq 2$, $u \geq 1$.)

$$
= \iint_{u^2+v^2\leq 2, u\geq 1} \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| dudv = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{area}(u^2 + v^2 \leq 2, u \geq 1) =
$$

(På grund av symmetri.)

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{area}(u^2 + v^2 \leq 2, u \leq -1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\text{area}(u^2 + v^2 \leq 2) - \text{area}(u^2 + v^2 \leq 2, u \geq -1)\big) =
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\pi(\sqrt{2})^2 - \text{area}(u^2 + v^2 \leq 2, u \geq -1)\big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(2\pi - \text{area}(u^2 + v^2 \leq 2, u \geq -1)\big) =
$$

(Enligt beräkningen av $\text{area}(u^2 + v^2 \leq 2, u \geq -1)$ i (12).)

$$
= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(2\pi - \left(\frac{3}{2}\pi + 1 \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\pi - 1 \right).
$$

Insättning av (12) och (13) i (11) ger att begränsningsytan till D har area

$$
A = 2\pi + \sqrt{\frac{3}{2}}(\pi + 2) = \pi \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{2} \right) + \sqrt{6}.
$$

4. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 2 + y$ där $z \geq \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$. Ytan $Y \cup Y_1$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz. \tag{14}$$

Insättning av $z = 2 + y$ i $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$ ger att $2 + y = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$ varav följer att $(2+y)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 1 \iff 2x^2 + (y-2)^2 = 7$. Ytan Y_1 är allså den del av planet $z = 2 + y$ där $2x^2 + (y-2)^2 \leq 7$. En parametrisering av ytan Y_1 är $x = u$, $y = v$, $z = 2 + v$, där $2u^2 + (v-2)^2 \leq 7$ Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, 2+v\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,1) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,-1,1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iint_{Y_1} (x, y^2, z^3) \cdot \mathbf{N}\, dS = \tag{15}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_2.)

$$= + \iint_{2u^2+(v-2)^2 \leq 7} \big(u, v^2, (2+v)^3\big) \cdot (0,-1,1)\; dudv =$$

$$= \iint_{2u^2+(v-2)^2 \leq 7} \big(-v^2 + (2+v)^3\big)\, dudv =$$

(Gör substitutionen $s = \sqrt{2}u$, $t = v - 2 \iff u = \frac{1}{\sqrt{2}}s$, $v = t + 2$, substitutionens funktional-determinant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $2u^2 + (v-2)^2 \leq 7$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 7$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 7} \big(-(t+2)^2 + (t+4)^3\big) \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| dsdt = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq 7} \big(t^3 + 11t^2 + 44t + 60\big)\; dsdt =$$

(Eftersom $t^3 + 44t$ är udda i t och området $s^2 + t^2 \leq 7$ är symmetriskt kring $t = 0$.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq 7} \big(11t^2 + 60\big)\; dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \leq 7$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq 7} \left(11 \cdot \frac{1}{2}(s^2+t^2) + 60\right) dsdt = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{s^2+t^2 \leq 7} \left(\frac{11}{2}(s^2+t^2) + 60\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\substack{0 \leq r \leq \sqrt{7} \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \left(\frac{11}{2}r^2 + 60\right) r\, dr\, d\theta = \sqrt{2}\,\pi \int_0^{\sqrt{7}} \left(\frac{11}{2}r^3 + 60r\right) dr =$$

$$= \sqrt{2}\,\pi \left[\frac{11}{8}r^4 + 30r^2\right]_0^{\sqrt{7}} = \frac{2219\sqrt{2}\pi}{8}.$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 + 2y + 3z^2$ och D är mängden $z \geq \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$, $z \leq 2 + y$, och vi får att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_D (1 + 2y + 3z^2)\, dxdydz = \tag{16}$$

(Gör substitutionen $u = x$, $v = y$, $w = z - y \iff x = u$, $y = v$, $z = v + w$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y,z)}{d(u,v,w)} = 1$. Villkoret $z \leq 2 + y$ övergår då i $w \leq 2$. Ytan $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$ är den ena manteln till den tvåmantlade hyperboloiden $2x^2 + 2y^2 = z^2 - 1$. (Den andra manteln är $z = -\sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$.) Insättning av $x = u$, $y = v$, $z = v + w$ i $2x^2 + 2y^2 = z^2 - 1$ ger att $2u^2 + 2v^2 = (v + w)^2 - 1 \iff 2u^2 + (v - w)^2 = 2w^2 - 1$ Av $2u^2 + (v - w)^2 = 2w^2 - 1$ följer vidare att $2w^2 - 1 \geq 0$, dvs att $w \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ eller att $w \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. I de nya koordinaterna är således den tvåmantlade hyperboloidens båda mantlar ytan $2u^2 + (v-w)^2 = 2w^2 - 1$, $w \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ samt ytan $2u^2 + (v-w)^2 = 2w^2 - 1$, $w \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Men $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$ medför att $z \geq \sqrt{y^2} = |y|$ varav fås att $w = z - y \geq |y| - y \geq 0$. Vi har alltså här att $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1} \iff 2u^2 + (v - w)^2 = 2w^2 - 1$, $w \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Eftersom D är mängden $z \geq \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 1}$, $z - y \leq 2$ får vi med vår substitution här att $(x, y, z) \in D$ övergår i $(u, v, w) \in \Omega$ där Ω är mängden $2u^2 + (v - w)^2 \leq 2w^2 - 1$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq w \leq 2$.)

$$= \iiint_\Omega \left(1 + 2v + 3(v + w)^2\right)|1|\, dudvdw = \iiint_\Omega \left(1 + 2v + 3(v + w)^2\right) dudvdw =$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} \left(\iint_{2u^2+(v-w)^2 \leq 2w^2-1} \left(1 + 2v + 3(v + w)^2\right) dudv \right) dw.$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

$$\iint_{2u^2+(v-w)^2 \leq 2w^2-1} \left(1 + 2v + 3(v + w)^2\right) dudv = \tag{17}$$

(Gör substitutionen $s = \sqrt{2}u$, $t = v - w \iff u = \frac{1}{\sqrt{2}}s$, $v = t + w$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, och $2u^2 + (v - w)^2 \leq 2w^2 - 1$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 2w^2 - 1$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 2w^2-1} \left(1 + 2(t + w) + 3(t + 2w)^2\right)|1|\, dsdt =$$

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 2w^2-1} (3t^2 + (12w + 2)t + 1 + 2w + 12w^2)\, dsdt =$$

(Eftersom $(12w + 2)t$ är udda i t och området $s^2 + t^2 \leq 2w^2 - 1$ är symmetriskt kring $t = 0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 2w^2-1} (3t^2 + 1 + 2w + 12w^2)\, dsdt =$$

(Eftersom området $s^2 + t^2 \leq 2w^2 - 1$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 2w^2-1} \left(3 \cdot \frac{1}{2}(s^2 + t^2) + 1 + 2w + 12w^2\right) dsdt =$$

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 2w^2-1} \left(\frac{3}{2}(s^2 + t^2) + 1 + 2w + 12w^2\right) dsdt =$$

(Inför polära koordinater $s = r\cos\theta$, $t = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0 \leq r \leq \sqrt{2w^2-1} \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \left(\frac{3}{2}r^2 + 1 + 2w + 12w^2\right) r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2w^2-1}} \left(\frac{3}{2}r^3 + (1 + 2w + 12w^2)r\right) dr =$$

$$= 2\pi \left[\frac{3}{8}r^4 + \frac{1}{2}(1 + 2w + 12w^2)r^2\right]_0^{\sqrt{2w^2-1}} = 2\pi \left(\frac{1}{8}(2w^2 - 1)^2 + \frac{1}{2}(1 + 2w + 12w^2)(2w^2 - 1)\right) =$$

$$= \pi \left(25w^4 + 4w^3 - 11w^2 - 2w - \frac{3}{4}\right).$$

Insättning av (17) i (16) ger att

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2}\left(25w^4+4w^3-11w^2-2w-\frac{3}{4}\right)dw = \tag{18}$$

$$= \pi\left[5w^5+w^4-\frac{11}{3}w^3-w^2-\frac{3}{4}w\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{2} = \frac{1697\pi}{12}+\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

Av (14), (15) och (18) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{1697\pi}{12}+\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}-\frac{2219\sqrt{2}\pi}{8} = \frac{1697\pi}{12}-\frac{6641\sqrt{2}\pi}{24}.$$

5. Sätt $\mathbf{F} = \big(-4x^2y+xyz+z^2+y, 4xy^2-x^2z-x+z, 2xz\big)$, så att den givna kurvintegralen är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. Eftersom $\mathbf{R}^3$ är en öppen, bågvis och enkelt sammanhängande mängd är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$ precis om $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ i hela $\mathbf{R}^3$. (I en öppen bågvis men ej enkelt sammanhängande mängd är $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ i mängden ett nödvändigt men ej tillräckligt villkor för kurvintgralens oberoende av vägen.) Beräkning ger att

$$\nabla\times\mathbf{F} = (D_1,D_2,D_3)\times\big(-4x^2y+xyz+z^2+y, 4xy^2-x^2z-x+z, 2xz\big) =$$

$$= (x^2-1, xy, 4x^2+8xy-3xz-2) \neq (0,0,0),$$

och alltså är kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ inte oberoende av vägen för kurvor γ i $\mathbf{R}^3$.

Vi visar nu att kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen för kurvor γ på cylinderytan $x^2+y^2=1$ genom att visa att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$ för varje enkel sluten kurva γ på cylinderytan. Vi gör det genom att använda Stokes sats. Gradienten av x^2+y^2, dvs vektorn $2(x,y,0)$, är en normalvektor till cylinderytan $x^2+y^2=1$ i en punkt (x,y,z) på cylinderytan. Denna normalvektor är utåtriktad och har längd 2 i varje punkt (x,y,z) på cylinderytan $x^2+y^2=1$. Den utåtriktade enhetsnormalvektorn till cylinderytan $x^2+y^2=1$ i en punkt (x,y,z) på cylinderytan är alltså $\mathbf{N}=(x,y,0)$. För denna utåtriktade enhetsnormalvektor får vi att

$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N} = (x^2-1, xy, 4x^2+8xy-3xz-2)\cdot(x,y,0) = \tag{19}$$

$$= x^3-x+xy^2 = x(x^2+y^2-1) = 0 \quad \text{i varje punkt } (x,y,z) \text{ på cylinderytan } x^2+y^2=1.$$

Låt nu γ vara en enkel sluten kurva på cylinderytan $x^2+y^2=1$. Vi får två fall.

Fall 1. Kurvan γ omsluter inte cylinderaxeln (z-axeln). Låt Y vara den del av cylinderytan som γ omsluter. Då är

$$\pm\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{N}\,dS = 0$$

enligt Stokes sats och (19). Plus- respektive minustecknet gäller om γ har positiv respektive negativ orientering i förhållande till Y och $\mathbf{N}$. Således är $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$ i detta fall.

Fall 2. Kurvan γ omsluter cylinderaxeln (z-axeln). Låt Γ vara cirkeln $x^2+y^2=1$ med riktning moturs i xy-planet. För godtyckligt reellt tal a låt vidare Γ_a vara cirkeln $x^2+y^2=1$, $z=a$ med riktning sådan att projektionen av Γ_a på xy-planet har riktning moturs. Då är kurvan Γ_a en kurva på cylinderytan $x^2+y^2=1$, kurvan Γ_a omsluter cylinderaxeln och det gäller att

$$\int_{\Gamma_a}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_a}(-4x^2y+xyz+z^2+y)\,dx+(4xy^2-x^2z-x+z)\,dy+2xz\,dz = \tag{20}$$

$$= \int_\Gamma(-4x^2y+xya+a^2+y)\,dx+(4xy^2-x^2a-x+a)\,dy =$$

(Enligt Greens formel.)

$$= \iint_{x^2+y^{\le}1} \big(4y^2 - 2xa - 1 - (-4x^2 + xa + 1)\big)\, dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^{\le}1} \big(4(x^2 + y^2) - 3xa - 2\big)\, dxdy =$$

(Eftersom $3xa$ är udda i x och området $x^2 + y^2 \le 1$ är symmetriskt kring $x = 0$.)

$$= \iint_{x^2+y^{\le}1} \big(4(x^2 + y^2) - 2\big)\, dxdy =$$

(Inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.)

$$= \iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}} \big(4r^2 - 2\big)\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 (4r^3 - 2r)\, dr = 2\pi \Big[r^4 - r^2\Big]_0^1 = 0$$

för godtyckligt reellt tal a. Låt nu talet a vara sådant att kurvan Γ_a helt ligger nedanför kurvan γ på cylinderytan (om a är tillräckligt stort och negativt gäller det säkert), och låt Y vara den del av cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ som ligger mellan de båda kurvorna γ och Γ_a. Då gäller att

$$\pm \int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathbf{dr} + \int_{\Gamma_a} \mathbf{F}\cdot \mathbf{dr} = \iint_Y (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{N}\, dS \tag{21}$$

enligt Stokes sats. Plus- respektive minustecknet gäller om γ har positiv respektive negativ orientering i förhållande till Y och $\mathbf{N}$. Tillsammans visar (19), (20) och (21) att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = 0$ även i detta fall.

Av fall 1 och fall 2 följer att $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = 0$ för varje enkel sluten kurva γ på cylinderytan, och således att kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ är oberoende av vägen för kurvor γ på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$.

Vi beräknar nu värdet av kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ då γ är en kurva på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1, 0, 0)$ på cylinderytan till en punkt (a, b, c) på cylinderytan. Låt $I(a, b, c)$ beteckna detta värde. Vi beräknar $I(a, b, c)$ genom att beräkna värdet av kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ för någon lämplig väg γ på cylinderytan från punkten $(1, 0, 0)$ på cylinderytan till punkten (a, b, c) på cylinderytan. Vilken sådan kurva γ vi väljer spelar ingen roll eftersom $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}$ enligt första delen av uppgiften har samma värde för varje sådan kurva γ. Eftersom punkten (a, b, c) är en punkt på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ och alltså $a^2 + b^2 = 1$ är $a = \cos t_0$ och $b = \sin t_0$ för något tal $t_0 \in [0, 2\pi[$. Låt γ_1 vara cirkelbågen $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$, $0 \le t \le t_0$, och låt γ_2 vara räta linjen $x = a$, $y = b$, $z = t$, $t \in [0, t_0]$ från punkten $(a, b, 0)$ till punkten (a, b, c). Då är $\gamma_1 \cup \gamma_2$ en kurva på cylinderytan $x^2 + y^2 = 1$ från punkten $(1, 0, 0)$ på cylinderytan till punkten (a, b, c) på cylinderytan, och med hjälp av denna kurva får vi att

$$I(a, b, c) = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} =$$

$$= \int_{\gamma_1} (-4x^2y + xyz + z^2 + y)\, dx + (4xy^2 - x^2z - x + z)\, dy + 2xz\, dz$$

$$+ \int_{\gamma_1} (-4x^2y + xyz + z^2 + y)\, dx + (4xy^2 - x^2z - x + z)\, dy + 2xz\, dz =$$

$$= \int_0^{t_0} \big((-4\cos^2 t \sin t + \sin t)(-\sin t) + (4\cos t \sin^2 t - \cos t)\cos t\big)\, dt + \int_0^c 2at\, dt =$$

$$= \int_0^{t_0} \big((8\cos^2 t \sin^2 t - (\cos^2 t + \sin^2 t)\big)\, dt + ac^2 =$$

(Använd att $8\cos^2 t \sin^2 t - (\cos^2 t + \sin^2 t) = 2(2\cos t \sin t)^2 - 1 = 2\sin^2 2t - 1 = -\cos 4t$.)

$$= \int_0^{t_0} (-\cos 4t)\, dt + ac^2 = \left[-\frac{1}{4} \sin 4t \right]_0^{t_0} + ac^2 = -\frac{1}{4} \sin 4t_0 + ac^2 =$$

(Använd att $\sin 4t = 2\cos 2t \sin 2t = 2(\cos^2 t - \sin^2 t) 2 \cos t \sin t = 4\cos^3 t \sin t - 4 \cos t \sin^3 t$.)

$$= -\cos^3 t_0 \sin t_0 + \cos t_0 \sin^3 t_0 + ac^2 = -a^3 b + ab^3 + ac^2.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.