MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Analys 4,
7,5 hp,
121220

15 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. a) Undersök om funktionen $f(x,y) = xy$ antar största och/eller minsta värde under bivillkoret $\{(x,y) : x^4 - 4xy + y^4 = 6\}$. Bestäm f:s största och minsta värde i förekommande fall. 3 p

   b) Undersök om funktionen $f(x,y) = xy$ antar största och/eller minsta värde under bivillkoret $\{(x,y) : x^4 - 4x^2y^2 + y^4 = 6\}$. Bestäm f:s största och minsta värde i förekommande fall. 2 p

2. Ytorna $z = x^2 + y^2$ och $z = 1 - y^2$ skär varandra i en sluten kurva. Låt γ vara denna kurva orienterad så att dess positiva riktning i punkten $(1,0,1)$ ges av vektorn $(0,1,0)$. Beräkna

$$\int_\gamma \left(y^2 + z\right)\, dx + z\, dy + xy\, dz.$$

5 p

3. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

där $\mathbf{F} = (y^3, x^3, z+1)$ och Y är den del av sfären $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ som ligger ovanför xy-planet (normalen utåt). 5 p

4. Beräkna den komplexa kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{\sin 2z\, dz}{z^2},$$

där γ är randen till den rektangel i $\mathbb{C}$ som har hörn i punkterna $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$, genomlupen i positiv led. 5 p

5. a) Avgör om följande generaliserade integral konvergerar:

$$\int_1^\infty (1 - \cos(1/x))dx.$$

2 p

   b) Summera den komplexa potenserien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left(k^2 - 1\right) 3^k z^k,$$

   samt ange dennas konvergensradie. 3 p

V.G.V.

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa Greens formel för områden i planet med en under- och en överdel och en vänster- och en högerdel. Skissera sedan hur Greens formel kan fås för mer allmänna områden i planet. 5 p

7. Låt $a_1, a_2, a_3, \dots$ vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. 5 p

Skrivningsåterlämning måndagen den 7 januari kl 12.00 i sal 13, därefter i rum 204, hus 6.