Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2012-12-20.

1. a) Mängden M av punkter som uppfyller bivillkoret är en sluten mängd eftersom den är nollställemängden till en kontinuerlig funktion. För att visa att den är kompakt räcker det därför att visa att den är begränsad. Eftersom vi vet att $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ så följer det att : $x^4-4xy+y^4 \geq x^4-2x^2-2y^2+y^4 = (x^2-1)^2+(y^2-1)^2-2$. Vi ser att om $x^2 \geq 4$ eller $y^2 \geq 4$ så blir $(x^2-1)^2+(y^2-1)^2-2 \geq 7 > 6$. Detta visar att $M \subset \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ och alltså är M kompakt. Det följer att både max och min måste antas och för att hitta var dessa antas använder vi Lagrange metod:

Vi beräknar $\nabla f = (y,x)$, $\nabla g = (4x^3-4y, 4y^3-4x)$, där $g(x,y) = x^4-4xy+y^4-6$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} y & x \\ 4x^3-4y & 4y^3-4x \end{vmatrix} =$$

$$y(4y^3-4x)-x(4x^3-4y) = 4(y^4-x^4),$$

dvs $x = y$ eller $x = -y$.

$x = y$ ger insatt i bivillkoret ekvationen $2x^4-4x^2-6 = 0$ med lösningarna $x = \pm\sqrt{3}$, vilket ger de två kritiska punkterna $(\sqrt{3},\sqrt{3})$ och $(-\sqrt{3},-\sqrt{3})$.

$x = -y$ ger insatt i bivillkoret ekvationen $2x^4+4x^2-6 = 0$ med lösningarna $x = \pm 1$, vilket ger de två kritiska punkterna $(1,-1)$ och $(-1,1)$.

Tydligen är de två första punkterna max-punkter med maxvärde 3, och de två senare punkterna är minpunkter med minvärde -1.

b) Bivillkoret är ett kvadratiskt samband mellan x^2 och y^2. Med kvadratkomplettering kan vi lösa ut x^2 som funktion av y^2:

$$x^2 = 2y^2 \pm \sqrt{3y^2+6}.$$

Om vi väljer plus-tecknet ser vi att om vi väljer y tillräckligt stort positivt så kommer x^2 att anta godtyckligt stora positiva värden. Ur detta följer att xy kommer att kunna anta både godtyckligt stora positiva och negativa värden, dvs varken max eller min antas.

2. Med Stokes sats kan vi göra om integralen till en flödesintegral genom vilken vi vill av ytorna. Vi väljer $z = 1-y^2$. Vi beräknar först rotationen av vektorfältet:

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z & z & xy \end{vmatrix} = (x-1, 1-y, -2y).$$

Ytornas skärningskurva fås genom att sätta de två uttrycken för z lika, vilket ger $x^2+y^2 = 1-y^2 \Leftrightarrow x^2+2y^2 = 1$. Stokes sats ger

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \mathbf{rotF}\cdot\mathbf{N}\,dS,$$

där Y är den del av grafen $z = 1-y^2$ som uppfyller $x^2+2y^2 \leq 1$. Villkoret på orienteringen av kurvan ger att kurvans projektion på xy-planet är orienterad moturs, vilket medför att och $\mathbf{N}$ ska vara den uppåtriktade normalen. Med $f(x,y) = 1-y^2$ blir $\mathbf{rotF}\cdot\mathbf{N}\,dS = \mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y dxdy = (-f'_x, -f'_y, 1) = (0, 2y, 1)dxdy$ Vi får

$$\iint_{x^2+2y^2\leq 1} (x-1, 1-y, -2y)\cdot(0,2y,1)\,dxdy =$$

$$\iint_{x^2+2y^2\leq 1} (-2y^2)\,dxdy$$

Övergång till elliptiska polära koordinater $x = r\cos\theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}}r\sin\theta, |J| = \frac{r}{\sqrt{2}}$ ger

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\sin^2\theta\frac{r}{\sqrt{2}}drd\theta =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\pi\cdot\frac{1}{4} = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

3. Låt Y vara ytan $x^2+y^2+(z-1)^2=4, z\geq 0$ och Y_0 vara ytan $z=0, x^2+y^2\leq 3$ (med normalen nedåt). Då utgör $Y\cup Y_0$ randen till en enkel sluten yta på vilken vi kan tillämpa Gauss sats:

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{Y_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV,$$

$$K=\{(x,y,z): x^2+y^2+(z-1)^2\leq 4, z\geq 0\}.$$

$$\iint_{Y_0}=\iint_{x^2+y^2\leq 3}(y^3,x^3,1)\cdot(0,0,-1)\,dxdy$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leq 3}(-1)\,dxdy=-3\pi.$$

Vidare får vi för divergensintegralen

$$\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV=\iiint_K(0+0+1)\,dxdydz.$$

$$=\int_0^3\left(\iint_{x^2+y^2\leq 4-(z-1)^2}dxdy\right)dz$$

$$=\int_0^3\pi(4-(z-1)^2)dz=\pi\int_0^3(3+2z-z^2)dz$$

$$=\pi\left[3z+z^2-\frac{1}{3}z^3\right]_0^3=9\pi.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=3\pi+9\pi=12\pi.$$

4. Funktionen är analytisk i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, alltså kan kurvan γ deformeras till en lite cirkel S_ϵ med radie $\epsilon>0$ runt 0, utan att integralens värde ändras. Om vi skriver om $f(z)$ som

$$f(z)=\frac{\sin 2z}{z^2}=\frac{\sin 2z}{z}\cdot\frac{1}{z}$$

och noterar att för små z gäller att

$$\frac{\sin 2z}{z}=\frac{2z+O(|z|^3)}{z}=2+O([z]^2),$$

så följer att

$$\int_\gamma\frac{\sin 2z\,dz}{z^2}=2\int_\gamma\frac{dz}{z}+O(|z|^2),$$

vilket i limes ger att

$$\int_\gamma\frac{\sin 2z\,dz}{z^2}=2\cdot 2\pi i=4\pi i.$$

5. a) Integralen är generaliserad i oändligheten. Integralen har en strikt positiv integrand och vi kan därför använda jämförelsekriterium II. Taylorutveckling ger

$$1-\cos(\frac{1}{x})=1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+O(\frac{1}{x^4})\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+O(\frac{1}{x^4}),$$

av vilket följer att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(1/x)}{1/x^2}=\frac{1}{2}.$$

Om vi jämför med $1/x^2$ så följer att integralen är konvergent om och endast om integralen

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^2}\,dx$$

konvergerar, vilket är sant. Slutsatsen blir att integralen är konvergent.

b) Sätt $w=3z$. Vi får

$$\sum_{k=2}^\infty\left(k^2-1\right)3^kz^k=\sum_{k=2}^\infty(k-1)(k+1)w^k$$

$$=D\left(\sum_{k=2}^\infty(k-1)w^{k+1}\right)=D\left(w^3\sum_{k=2}^\infty(k-1)w^{k-2}\right)$$

$$=D\left(w^3D\left(\sum_{k=2}^\infty w^{k-1}\right)\right)=D\left(w^3D\left(\frac{w}{1-w}\right)\right)$$

$$=D\left(\frac{w^3}{(1-w)^2}\right)=\frac{3w^2-w^3}{(1-w)^3}=27\frac{z^2-z^3}{(1-3z)^3}.$$

För konvergensradien fås enligt känd formel

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{(k^2-1)3^k}{((k+1)^2-1)3^{k+1}}=\frac{1}{3}.$$

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm, 121220/