MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Analys 4,
7,5 hp,
130116

15 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = (2x^2 + y^2)e^{y-2x}$.

   a) Undersök om $f(x,y)$ antar största och/eller minsta värde i området $\{(x,y) : |y| \leq x\}$. Bestäm f:s största och minsta värde i förekommande fall. 3 p

   b) Undersök om $f(x,y)$ antar största och/eller minsta värde i området $\{(x,y) : x \geq 0\}$. Bestäm f:s största och minsta värde i förekommande fall. 2 p

2. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{-y^2dx + 2xydy}{x^2 + y^4}$$

   från $(-1,0)$ till $(1,0)$ längs kurvan $\gamma : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (t, 2t^2 - 2)$, $-1 \leq t \leq 1$. 5 p

3. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$$

   där $\mathbf{F} = (x^3, y^3, 1)$ och Y är ytan $z = \cos(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$ (normalen uppåt). 5 p

4. Låt $f(z)$ vara en analytisk funktion med egenskapen $f(0) = 0$. Antag att vi vet att $\mathrm{Re} f(z) = x^3 - x^2 - 3xy^2 + y^2 + 2y$, där $z = x + iy$. Bestäm funktionen $f(z)$. (Ledning: använd Cauchy-Riemanns ekvationer!) 5 p

5. a) Avgör om följande serie konvergerar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^k}.$$

   2 p

   b) Beräkna summan av serien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)2^k}.$$

   3 p

V.G.V.

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa divergenssatsen för områden i rummet med en under- och en översida, en vänster- och en högersida och en bak- och en framsida. Skissera sedan hur divergenssatsen kan fås för mer allmänna områden i rummet. 5 p

7. Bevisa Cauchys rotkriterium för serier: Antag att $|a_k|^{1/k} \to A$ när $k \to \infty$. Om $0 \leq A < 1$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent, och om $1 < A$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. 5 p

Skrivningsåterlämning fredagen den 25 januari kl 12.15 i rum 326, hus 6, därefter i rum 204, hus 6.