Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2013-01-16.

1. a) Det är klart att $f(x,y) \geq 0$ och att $f(0,0) = 0$, alltså antas globalt minimum och är lika med 0. För maximum noterar vi att

$$0 \leq f(x,y) \leq 3x^2 e^{-x} \to 0.$$

Om vi väljer R så stort att $3x^2e^{-x}$ är strikt mindre än t ex $f(1,0) = 2/e^2$ för $x > R$ så följer att maximum antas och måste vara lika med maximum av f på triangeln $\{(x,y) : |y| \leq x \leq R\}$.

För att hitta max deriverar vi

$$\begin{cases} f'_x &= (4x - 4x^2 - 2y^2)e^{y-2x} = 0, \\ f'_y &= (2y - 2x^2 - y^2)e^{y-2x} = 0, \end{cases}$$

Om vi dividerar bort exponentialfaktorn e^{y-2x} och sedan drar två gånger den andra ekvationen från den första ser vi att $x = y$, men detta svarar mot randpunkter som vi inte tar med i detta steg. Det återstår möjligheten att max antas på randen, dvs då $y = x$ eller då $y = -x$.

$y = x$. Vi undersöker $g(t) = f(t,t) = 3t^2e^{-t}$. Vi får $g'(t) = 3t(2-t)e^{-t}$ vilket ger den möjliga maxpunkten $t = 2$, dvs punkten $(2,2)$. ($t = 0$ behöver inte undersökas eftersom det värdet svarar mot minpunkten.)

$y = -x$. Vi undersöker $h(t) = f(t,-t) = 3t^2e^{-3t}$. Vi får $h'(t) = 3t(2-3t)e^{-3t}$ vilket ger den möjliga maxpunkten $t = 2/3$, dvs punkten $(2/3-, 2/3)$.

Jämförelse mellan de två möjliga maxpunkterna ger $f(2,2) = 12/e^2 > 4/(3e^2) = f(2/3,-2/3)$. Maximum är alltså $12/e^2$.

b) Minimum $= 0$ av samma skäl som i a). Men i detta fall antas inte maximum eftersom

$$\lim_{y\to\infty} f(0,y) = \lim_{y\to\infty} y^2e^y = \infty.$$

Svar: a) $\min = 0, \max = 12/e^2$, b) $\min = 0, \max$ existerar ej.

2. Vi verifierar först genom derivation att $Q'_x = P'_y$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y^5 - 2x^2y}{(x^2+y^4)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Eftersom detta villkor är uppfyllt kan vi deformera integrationsvägen utan att ändra integralens värde så länge vi inte flyttar vägen förbi origo. Vi väljer därför i stället att integrera längs en annan kurva $\Gamma : x^2 + y^4 = 1, y \leq 0$. (med orienteringen från $(-1,0)$ till $(1,0)$).

Vi kan parametrisera med

$$\begin{cases} x(t) &= -\cos t \\ y(t) &= -\sqrt{\sin t} \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq \pi.$$

Vi får $\int_\Gamma =$

$$\int_0^\pi \frac{-\sin t \sin t + 2(-\cos t)(-\sqrt{\sin t})\frac{-\cos t}{2\sqrt{\sin t}}}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{-\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} dt = \int_0^\pi (-1)\, dt = -\pi.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\int_\gamma \frac{-y^2 dx + 2xy dy}{x^2 + y^4} = -\pi.$$

Svar: Integralen blir $-\pi$.

3. Vi kompletterar ytan Y med ytan $Y_0 : z = 0, x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$ (med normalen nedåt) och får randen till ett område K där vi kan tillämpa Gauss sats.

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV,$$

$$K = \{(x,y,z) : 0 \leq z \leq \cos(x^2+y^2),\ x^2+y^2 \leq \tfrac{\pi}{2}\}.$$

$$\iint_{Y_0} = \iint_{x^2+y^2\leq\frac{\pi}{2}} (x^3, y^3, 1)\cdot(0,0,-1)\, dxdy =$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq\frac{\pi}{2}} (-1)\, dxdy = -\frac{\pi^2}{2}.$$

Vidare får vi för divergensintegralen

$$\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV = \iiint_K (3x^2 + 3y^2 + 0)\, dxdydz =$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos(x^2+y^2)} 3(x^2+y^2)\, dz \right) dxdy$$

$$= \iint_{x^2+y^2 \le \frac{\pi}{2}} 3(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)\, dxdy =$$

(övergång till polära koordinater ger)

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 3r^2 \cos r^2\, r dr d\theta = 6\pi \int_0^{\sqrt{\pi/2}} r^3 \cos r^2\, dr$$

(sätt $t = r^2, dt = 2rdr$)

$$= 6\pi \int_0^{\pi/2} t \cos t \frac{dt}{2} = 3\pi \left[t \sin t \right]_0^{\pi/2} - 3\pi \int_0^{\pi/2} \sin t\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\pi^2 - 3\pi \left[-\cos t \right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi^2 - 3\pi.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{2}\pi^2 - 3\pi = 2\pi^2 - 3\pi.$$

Svar: Integralen blir $2\pi^2 - 3\pi$.

4. Vi söker en analytisk funktion $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ sådan att

$$P(x, y) = x^3 - x^2 - 3xy^2 + y^2 + 2y.$$

Enligt den första av Cauchy-Riemanns ekvationer måste gälla att

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 - 2x - 3y^2.$$

Integration m a p y ger

$$Q(x, y) = 3x^2 y - 2xy - y^3 + h(x),$$

där $h(x)$ är en (än så länge) godtycklig funktion av x. För att bestämma $h(x)$ använder vi den andra av Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = -6xy + 2y - h'(x) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Eftersom derivation av den givna funktionen ger att

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6xy + 2y + 2,$$

ger jämförelse med föregående formel att $h'(x) = -2$, dvs $h(x) = -2x + C$. Vi får alltså $f(z) =$

$$x^3 - x^2 - 3xy^2 + y^2 + 2y + i(3x^2 y - 2xy - y^3 - 2x + C).$$

Insättning i villkoret $f(0) = 0$ ger att $C = 0$. Detta ger ett korrekt svar, men funktionen kan på ett snyggare sätt skrivas om som

Svar: $f(z) = z^3 - z^2 - 2iz$.

5. a) Vi skriver ut en typisk term:

$$\frac{(2k)!}{k^k} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \frac{k+2}{k} \cdot \ldots \cdot \frac{2k}{k}.$$

Eftersom alla faktorer är ≥ 1 går produkten inte mot 0 då $k \to \infty$. Serien är alltså divergent.

b) Vi beräknar först potensserien

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} x^k = \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)} x^{k+1} =$$

$$\frac{1}{x} \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^x t^k\, dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left(\sum_{k=2}^{\infty} t^k \right) dt =$$

$$\frac{1}{x} \int_0^x \frac{t^2}{1-t} dt = \frac{1}{x} \int_0^x \left(-t - 1 + \frac{1}{1-t} \right) dt =$$

$$\frac{1}{x} \left[-t^2 - t - \ln(1-t) \right]_0^x = -\frac{1}{2}x - 1 - \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

Insättning av $x = 1/2$ i detta uttryck ger

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k+1)2^k} = 2\ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Svar: a) Divergent b) Summan är $2\ln 2 - \frac{5}{4}$.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm, 130116/