MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Analys 4,
7,5 hp,
130528

15 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Betrakta funktionen $f(x,y) = xye^{-x-y}$.

   a) Undersök om $f(x,y)$ antar största och/eller minsta värde i området $\{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Bestäm f:s största och minsta värde i förekommande fall. 3 p

   b) Undersök om $f(x,y)$ antar största och/eller minsta värde i området $\{(x,y) : x + y \geq 0\}$. Bestäm f:s största och minsta värde i förekommande fall. 3 p

2. Bestäm konstanterna a och b så att kurvintegralen

$$\int_\Gamma (ax^2y^2 + 3ye^{\sin x}\cos x)\,dx + (8x^3y + be^{\sin x})\,dy$$

   blir oberoende av vägen, och beräkna integralens värde då Γ är kurvan $x = \arctan t, y = t^2$, där t går från 0 till 1. 5 p

3. Beräkna kurvintegralen

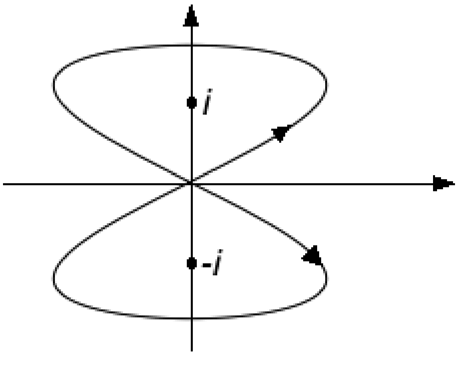
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

   där $\mathbf{F} = (y^2z, 2xyz + x, xy^2 + 2z)$ och kurvan γ definieras av $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \cos^4 t \sin^2 t)$, där $0 \leq t \leq 2\pi$. 5 p

4. Beräkna de komplexa kurvintegralerna

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+1} \qquad \text{och} \qquad \int_\Gamma \frac{zdz}{z^2+1},$$

   där Γ är den orienterade kurvan i figuren nedan.



5 p

5. a) Avgör om följande serie konvergerar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ln k}.$$

2 p

b) Beräkna summan av serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)(k+1)z^k.$$

2 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt vektorfält definierat i en bågvis sammanhängande öppen delmängd Ω av planet. Visa att kurvintegraler av $\mathbf{F}$ i Ω är oberoende av vägen om och endast om $\mathbf{F}$ har en potential i Ω. 5 p

7. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa att om $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är konvergent så är också $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent. 5 p

Skrivningsåterlämning tisdagen den 4 juni kl 15.15 i sal 15, hus 5, därefter i rum 204, hus 6.