Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2013-05-28.

1. a) Det är klart att $f(x,y) \geq 0$ och att $f(x,y) = 0$ på de positiva axlarna, alltså antas globalt minimum och är lika med 0. För maximum noterar vi att $0 \leq x, y \leq x + y$ vilket ger att

$$0 \leq f(x,y) \leq (x+y)^2 e^{-(x+y)}.$$

Om vi väljer R så stort att $R^2 e^{-R}$ är strikt mindre än t ex $f(1,1) = 1/e^2$ så följer att maximum antas och måste vara lika med maximum av f på triangeln $\{(x,y) : x, y \geq 0, x + y \leq R\}$.

För att hitta max deriverar vi

$$\begin{cases} f'_x &= y(x-1)e^{-x-y} = 0, \\ f'_y &= x(y-1)e^{-x-y} = 0. \end{cases}$$

Vi kan anta att $x, y > 0$ så vi kan dividera bort de positiva faktorerna och får punkten $x = 1, y = 1$. Eftersom det inte finns några andra möjligheter måste detta vara maxpunkten och vi får $\max = f(1,1) = e^{-2}$.

b) Eftersom $f(x,y) < 0$ på de delar av området som inte ligger i första kvadranten så sammanfaller maximum i det här fallet med maximum i a), dvs $\max = f(1,1) = e^{-2}$.

Om vi betraktar $f(t,-t) = -t^2 \to -\infty$ då $t \to \pm\infty$ så ser vi att det inte finns något minimum.

Svar: a) $\min = 0, \max = e^{-2}$, b) min saknas, $\max = e^{-2}$.

2. Vi genom derivation villkoret $Q'_x = P'_y$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(8x^3 y + b e^{\sin x}) = 24x^2 y + b e^{\sin x} \cos x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ax^2y^2 + 3ye^{\sin x}\cos x) = (2ax^2y + 3e^{\sin x}\cos x).$$

Vi ser att om dessa uttryck ska vara lika så måste gälla att $2a = 24 \Leftrightarrow a = 12$ och $b = 3$. Integration av den P med avseende på x ger att

$$U(x,y) = \int (12x^2y^2 + 3ye^{\sin x}\cos x)\, dx$$

$$= 4x^3y^2 + 3ye^{\sin x} + g(y).$$

Om vi deriverar detta uttryck m a p y och jämför med Q ser vi att vi kan välja $g(y) = 0$.

Eftersom vi nu har en potential kan vi beräkna integralen som

$$\int_\Gamma = U(\frac{\pi}{4}, 1) - U(0,0) = \frac{\pi^3}{16} + 3e^{1/\sqrt{2}}.$$

Svar: Integralen blir $\frac{\pi^3}{16} + 3e^{1/\sqrt{2}}$.

3. Kurvan ligger uppenbarligen på ytan $z = x^4y^2$, och med Stokes sats kan vi göra om integralen till en flödesintegral genom denna. Vi beräknar först rotationen av vektorfältet:

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z & 2xyz + x & xy^2 + 2z \end{vmatrix} = (0,0,1).$$

Yt-styckets projektion på xy-planet är $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Stokes sats ger

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \mathbf{rotF} \cdot \mathbf{N}\, dS =$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (0,0,1) \cdot (-f'_x, -f'_y, 1)\, dxdy =$$

($f(x,y) = x^4y^2$, men derivatorna behöver aldrig beräknas)

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} 1\, dxdy = \pi.$$

Svar: Integralen blir π.

4. Integrationsvägen kan deformeras till två små cirklar Γ_ϵ^+ och Γ_ϵ^- som båda har radie $\epsilon > 0$, och där Γ_ϵ^+ omlöper punkten i ett varv i positiv led och Γ_ϵ^- omlöper punkten $-i$ ett varv i negativ led.

Vi ser nu enligt Cauchy's integralsats (med $f(z) = 1/(z+i)$) att

$$\int_{\Gamma_\epsilon^+} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{\Gamma_\epsilon^+} \frac{f(z)dz}{z-i} = 2\pi i f(i) = \pi.$$

På samma sätt får vi (med $g(z) = 1/(z-i)$)

$$\int_{\Gamma_\epsilon^-} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{\Gamma_\epsilon^-} \frac{g(z)dz}{z+i} = (-2\pi i)g(-i) = \pi.$$

vilket ger att

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{\Gamma_\epsilon^+} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{\Gamma_\epsilon^-} \frac{dz}{z^2+1} = \pi + \pi = 2\pi.$$

Den andra integralen beräknas på liknande sätt (med $f(z) = z/(z+i)$):

$$\int_{\Gamma_\epsilon^+} \frac{zdz}{z^2+1} = \int_{\Gamma_\epsilon^+} \frac{f(z)dz}{z-i} = 2\pi i f(i) = \pi i.$$

På samma sätt får vi (med $g(z) = z/(z-i)$)

$$\int_{\Gamma_\epsilon^-} \frac{zdz}{z^2+1} = \int_{\Gamma_\epsilon^-} \frac{g(z)dz}{z+i} = (-2\pi i)g(-i) = -\pi i,$$

vilket ger att

$$\int_{\Gamma} \frac{zdz}{z^2+1} = \int_{\Gamma_\epsilon^+} \frac{zdz}{z^2+1} + \int_{\Gamma_\epsilon^-} \frac{zdz}{z^2+1} = \pi i - \pi i = 0.$$

Svar: Den första integralen är 2π, den andra är 0.

5. a) Eftersom $e^2 < 8$ följer att $\ln k > 2$ för $k \geq 8$. Det följer då att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ln k} = \sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ln k} + \sum_{k=8}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ln k} \leq$$

$$\sum_{k=1}^{7} \left(\frac{1}{k}\right)^{\ln k} + \sum_{k=8}^{\infty} k^{-2} < \infty.$$

Serien är konvergent enligt jämförelsekriterium I.

b) Vi beräknar potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)(k+1)z^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)D(z^{k+1}) =$$

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)(k+2)z^{k+1}\right) =$$

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)Dz^{k+2}\right) =$$

$$D\left(D\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+3)z^{k+2}\right)\right) =$$

$$D\left(D\left(\sum_{k=0}^{\infty} Dz^{k+3}\right)\right) =$$

$$D\left(D\left(D\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+3}\right)\right)\right) =$$

$$D\left(D\left(D\left(\frac{z^3}{1-z}\right)\right)\right) =$$

$$D^3\left(-z^2 - z - 1 + \frac{1}{1-z}\right) = D^3\left(\frac{1}{1-z}\right) =$$

$$D^2\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right) = D\left(\frac{2}{(1-z)^3}\right) = \frac{6}{(1-z)^4}$$

Svar: a) konvergent b) Summan är $6(1-z)^{-4}$.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm, 130528/