MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Martin Tamm

Tentamensskrivning i
Analys 4,
7,5 hp,
130815

15 poäng ger säkert godkänt. Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst två av skrivningspoängen kommer från teoridelen. Talen är inte ordnade efter svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Undersök om det finns punkter på kurvan $x^3 + 3x^2y + 2y^3 = 6$ där avståndet till origo är minimalt eller maximalt. Bestäm det största och minsta avståndet i förekommande fall. 5 p

2. Kurvan Γ ges av $\mathbf{r}(t) = (t, e^t)$, där t går från 0 till 1. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma \left(3x^{11}y - 3x^8y^5\right) dx + \left(\frac{1}{4}x^{12} - \frac{5}{3}x^9y^4 + 2y\right) dy.$$

5 p

3. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot N dS.$$

$\mathbf{F} = (x, y, z)$ och ytan Y är den del av grafen $z = 2 - (x^2 + y^2)^2$ där $z \geq 1$ (normalen uppåt). 5 p

4. Beräkna den komplexa kurvintegralen

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)},$$

då Γ är den positivt orienterade slutna kurva i halvplanet $\operatorname{Im} z \geq 0$ som ges av

a) en halvcirkel med centrum i origo och radie 2, tillsammans med intervallet $[-2, 2]$.

b) en halvcirkel med centrum i origo och radie 4, tillsammans med intervallet $[-4, 4]$. 5 p

5. a) Avgör om någon av följande serier konvergerar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}.$$

2 p

b) Beräkna summan av serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{2^k}.$$

3 p

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa divergenssatsen för områden med en översida, en undersida och i övrigt lodräta väggar. Skissera sedan hur satsen kan generaliseras till mer allmänna områden. 5 p

7. Bevisa Cauchys rotkriterium för serier: Antag att $|a_k|^{1/k} \to A$ när $k \to \infty$. Om $0 \leq A < 1$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolutkonvergent, och om $1 < A$ så är $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. 5 p

Skrivningsåterlämning onsdagen den 28 augusti kl 11.00 i rum 326, hus 6, därefter i rum 204, hus 6.