Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2013-08-15.

1. Vi observerar först att problemet att minimera (kvadraten på) avståndet till origo är ekvivalent med att minimera funktionen $f(x,y) = x^2 + y^2$ under bivillkoret $g(x,y) = x^3 + 3x^2y + 2y^3 - 6 = 0$.

Minimum måste antas. Detta inses t ex genom att välja en sluten cirkelskiva D med centrum i origo och radie tillräckligt stor för att åtminstone någon punkt på kurvan ska ligga i D. Vi ser nu att minsta avståndet från kurvan till origo måste antas inuti D, och eftersom problemet att minimera avståndet från punkter i D till origo är ett kompakt problem, följer det att min antas.

För att hitta min beräknar vi $\nabla f = (2x, 2y)$ och $\nabla g = (3x^2 + 6xy, 3x^2 + 6y^2)$. Vi får

$$0 = \begin{vmatrix} 3x^2 + 6xy & 3x^2 + 6y^2 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} =$$

$$= 2y(3x^2 + 6xy) - 2x(3x^2 + 6y^2) = 6x^2(y - x),$$

vilket ger att $x = 0$ eller $x = y$. $x = 0$ ger insatt i $x^3 + 3x^2y + 2y^3 - 6 = 0$ att $2y^3 - 6 = 0 \Rightarrow y = \sqrt[3]{3}$, vilket också ger avståndet $\sqrt[3]{3}$ till origo. $x = y$ ger insatt i $x^3 + 3x^2y + 2y^3 - 6 = 0$ att $6x^3 - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 = y$, vilket ger avståndet $\sqrt{2}$. Eftersom minimum måste antas i någon av dessa punkter, och eftersom $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$ så följer att det kortaste avståndet är $\sqrt{2}$.

För varje värde på x har tredjegradsekvationen $x^3 + 3x^2y + 2y^3 - 6 = 0$ minst en reell lösning y. Motsvarande punkt (x,y) ligger alltså på kurvan och avståndet till origo är $\geq |x|$, vilket kan väljas godtyckligt stort. Det följer att det inte finns någon punkt med maximalt avstånd.

Svar: Min $= \sqrt{2}$, max saknas.

2. Vi undersöker med derivation villkoret $Q'_x = P'_y$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}x^{12} - \frac{5}{3}x^9y^4 + 2y\right) = 3x^{11} - 15x^8y^4,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^{11}y - 3x^8y^5\right) = 3x^{11} - 15x^8y^4.$$

Vi ser att om dessa uttryck är lika i hela planet och vektorfältet (P,Q) är alltså ett potentialfält. Integration av Q m a p y ger

$$U(x,y) = \int \left(\frac{1}{4}x^{12} - \frac{5}{3}x^9y^4 + 2y\right) dy =$$

$$= \frac{1}{4}x^{12}y - \frac{1}{3}x^9y^5 + y^2 + g(x).$$

Om vi deriverar detta uttryck m a p x och jämför med P ser vi att vi kan välja $g(x) = 0$.

Eftersom vi nu har en potential kan vi beräkna integralen som

$$\int_\Gamma = U(1,e) - U(0,1) = \frac{1}{4}e - \frac{1}{3}e^5 + e^2 - 1.$$

Svar: Integralen blir $\frac{1}{4}e - \frac{1}{3}e^5 + e^2 - 1$.

3. Vi kompletterar ytan Y med ytan $Y_0 : z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$ (med normalen nedåt) och får randen till ett område K där vi kan tillämpa Gauss sats.

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_0} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV,$$

$$K = \{(x,y,z) : 1 \leq z \leq 2 - (x^2+y^2)^2,\ x^2+y^2 \leq 1.\},$$

$$\iint_{Y_0} = \iint_{x^2+y^2\leq 1} (x,y,1)\cdot(0,0,-1)\,dxdy =$$

$$= -\iint_{x^2+y^2\leq 1} 1\,dxdy = -\pi.$$

Vidare får vi för divergensintegralen

$$\iiint_K \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV = \iiint_K (1+1+1)\,dxdydz =$$

$$= \int_1^2 \left(\iint_{x^2+y^2\leq\sqrt{2-z}} 3\,dxdy\right) dz$$

$$= \int_1^2 3\pi\sqrt{2-z}\,dz = 3\pi\left[-\frac{2}{3}(2-z)^{3/2}\right]_1^2 = 2\pi.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 2\pi - (-\pi) = 3\pi.$$

Svar: Integralen blir 3π.

4. a) Innanför Γ har integranden en enda pol, nämligen i $z = i$. Integrationsvägen kan deformeras till en liten cirkel Γ_ϵ med radie ϵ runt denna. Om ϵ är litet så kommer funktionen $f(z) = (z+i)^{-1}(z^2+9)^{-1}$ att vara analytisk innanför Γ_ϵ och Cauchys integralsats ger därför

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \int_\Gamma \frac{dz}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} =$$

$$\int_{\Gamma_\epsilon} \frac{f(z)dz}{z-i} = 2\pi i f(i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

b) Innanför Γ har integranden två poler, nämligen i $z = i$ och $z = 3i$. Integrationsvägen kan nu deformeras till två små cirklar Γ_ϵ^1 och Γ_ϵ^2 med radie ϵ runt dessa. Om ϵ är litet så kommer funktionen $f(z)$ i a)-uppgiften att vara analytisk innanför Γ_ϵ^1, och funktionen $g(z) = (z^2+1)^{-1}(z+3i)^{-1}$ kommer att vara analytisk innanför Γ_ϵ^2. I det här fallet ger Cauchys integralsats

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \int_{\Gamma_\epsilon^1} \frac{f(z)dz}{z-i} + \int_{\Gamma_\epsilon^2} \frac{g(z)dz}{z-3i} =$$

$$2\pi i f(i) + 2\pi i g(3i) = \frac{\pi}{8} + 2\pi i\cdot\frac{1}{-8}\cdot\frac{1}{6i} = \frac{\pi}{12}.$$

Svar: Den första integralen är $\frac{\pi}{8}$, den andra är $\frac{\pi}{12}$.

5. a) Omskrivningen

$$\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k} = \frac{k}{(1+1/k)^k}$$

visar att termerna i den första serien går mot oändligheten eftersom täljaren $k \to \infty$ och nämnaren $(1+1/k)^k \to e$. Serien är alltså divergent.

I fallet med de inverterade termerna i b) ser vi att om vi sätter

$$a_k = \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}} \quad \text{och} \quad b_k = 1/k,$$

så följer att

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = e.$$

Eftersom serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

divergerar så följer att även denna serie divergerar enligt jämförelsekriterium II.

b) Vi beräknar först potensserien

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 z^k$$

och beräknar sedan serien genom att sätta $z = \frac{1}{2}$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 z^k =$$

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^{k+1}\right) =$$

$$D\left(z\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^{k}\right) =$$

$$D\left(zD\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1}\right)\right) =$$

$$D\left(zD\left(\frac{z}{1-z}\right)\right) =$$

$$D\left(\frac{z}{(1-z)^2}\right) =$$

$$= \frac{1+z}{(1-z)^3}.$$

Vi beräknar nu den ursprungliga serien genom att sätta $z = \frac{1}{2}$:

$$S = \frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} = 12.$$

Svar: a) båda divergerar. b) Summan är 12.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm, 130815/