MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys IV
140116

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna kurvintegralen $\int_\gamma (xy^3 + x^5 + z^5)\,dx + (xy^2 - x^5 + z^5)\,dy + (x^5 + z^5)\,dz$ där γ är den del av skärningskurvan mellan cylinderytan $x^2 + 2y^2 = 2$ och planet $z = 1 + x + y$ som ligger i området $x \geq 0$ och riktningen för kurvan γ är sådan att y växer då (x, y, z) genomlöper γ i dess riktning. 10 p

2. Sätt $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ och $g(x,y) = 2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + y^3 - 12$. Låt A vara mängden $g(x,y) = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, och låt B vara mängden $g(x,y) = 0$. Motivera att $f(x,y)$ har ett största och ett minsta värde på mängden A, bestäm största och minsta värdet på A, och ange varje punkt där dessa värden antas. Motivera också att $f(x,y)$ har ett minsta men inget största värde på mängden B, bestäm minsta värdet på B, och ange varje punkt där detta värde antas. 10 p

3. a) Avgör om den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^{5/3}}\,dx$ är konvergent eller divergent. 5 p

   b) För varje reellt tal a och varje heltal $n \geq 1$ sätt

$$b_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} a^k}{\sum_{k=0}^{n} a^{2k}} = \frac{1 + a + \ldots + a^n}{1 + a^2 + \ldots + a^{2n}}.$$

   Bestäm alla reella tal a för vilka serien $\sum_{n=1}^\infty b_n$ är konvergent. 5 p

4. Låt n vara ett heltal ≥ 1, och låt kurvan γ i det komplexa talplanet $\mathbf{C}$ vara cirkeln $|z| = 1$ ($z \in \mathbf{C}$) ett varv moturs. Visa att

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n\theta}{5 + 3\sin\theta}\,d\theta = \frac{1}{6}\int_\gamma \frac{2 - z^{2n}}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)}\,dz - \frac{1}{6}\int_\gamma \frac{1}{z^{2n}\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)}\,dz$$

   och beräkna $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n\theta}{5 + 3\sin\theta}\,d\theta$ uttryckt i n. 10 p

5. Låt γ_1 vara räta linjen $y = \frac{1}{4}x$ från punkten $(0,0)$ till punkten $\left(2\pi, \frac{\pi}{2}\right)$, och låt γ_2 vara räta linjen $y = \frac{1}{4}x$ från punkten $(0,0)$ till punkten $(4\pi, \pi)$. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\gamma \frac{\cos y}{1 + \sin x \sin y}\,dx + \frac{\cos x}{1 + \sin x \sin y}\,dy$$

   för $\gamma = \gamma_1$ och för $\gamma = \gamma_2$. 10 p

Var god vänd.

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. (Cauchys konvergenskriterium för positiva serier.) Låt $f(x)$ vara ≥ 0 och avtagande på intervallet $x \geq 1$. Visa att den oändliga serien $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ och den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ då båda är konvergenta och divergenta samtidigt. 10 p

7. (Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.) Antag att

   (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$

   (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

   Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ då är konvergent och att seriens summa s uppfyller att $0 \leq s \leq a_1$. 10 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning tisdag 28 januari kl 12.15-12.30 utanför sal 15 hus 5, därefter i rum 204 hus 6.