Lösningar till Matematisk analys IV, 140116

1. Den givna kurvintegralen kan beräknas genom att använda Stokes sats. Kurvan γ är inte en sluten kurva. För att kunna använda Stokes sats måste vi därför först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Vi gör på följande sätt. Skärningspunkterna mellan kurvan γ och planet $x = 0$ är de (x, y, z) för vilka $x = 0$, $x^2+2y^2 = 2$ och $z = 1+x+y$, dvs punkterna $(0, -1, 0)$ och $(0, 1, 2)$. Låt γ_1 vara skärningslinjen mellan planet $x = 0$ och planet $z = 1+x+y$ från punkten $(0, -1, 0)$ till punkten $(0, 1, 2)$, dvs räta linjen $z = 1 + y$, $x = 0$ från punkten $(0, -1, 0)$ till punkten $(0, 1, 2)$ Låt också Y vara den del av planet $z = 1+x+y$ där $x^2+2y^2 \leq 2$, $x \geq 0$. Kurvan $\gamma \cup (-\gamma_1)$ är då en sluten kurva vars projektion på xy-planet har positiv omloppsriktning, och $\gamma \cup (-\gamma_1)$ är randkurvan till ytan Y. En parametrisering av ytan Y är $x = u$, $y = v$, $z = 1 + u + v$, $u^2 + 2v^2 \leq 2$, $u \geq 0$. Med $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, 1 + u + v)$ får vi att $\mathbf{r}_1'(u, v) = (1, 0, 1)$, $\mathbf{r}_2'(u, v) = (0, 1, 1)$ och $\mathbf{r}_1'(u, v) \times \mathbf{r}_2'(u, v) = (-1, -1, 1)$, och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u, v) \times \mathbf{r}_2'(u, v)$ till Y pekar uppåt i den införda parametriseringen. Låt vidare $\mathbf{N}$ vara den uppåtriktade enhetsnormalen till Y. Med dessa beteckningar har vi att

$$(1) \quad \int_\gamma (xy^3 + x^5 + z^5)\, dx + (xy^2 - x^5 + z^5)\, dy + (x^5 + z^5)\, dz$$

$$- \int_{\gamma_1} (xy^3 + x^5 + z^5)\, dx + (xy^2 - x^5 + z^5)\, dy + (x^5 + z^5)\, dz$$

$$= \int_{\gamma \cup (-\gamma_1)} (xy^3 + x^5 + z^5)\, dx + (xy^2 - x^5 + z^5)\, dy + (x^5 + z^5)\, dz$$

(Enligt Stokes sats.)

$$= \iint_Y \left(\nabla \times \left(xy^3 + x^5 + z^5, xy^2 - x^5 + z^5, x^5 + z^5\right)\right) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

$$= \iint_Y (-5z^4, -5x^4 + 5z^4, y^2 - 3xy^2 - 5x^4) \cdot \mathbf{N}\, dS$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y.)

$$= + \iint_{u^2+2v^2 \leq 2, u \geq 0} \left(-5(1 + u + v)^4, -5u^4 + 5(1 + u + v)^4, v^2 - 3uv^2 - 5u^4\right) \cdot (-1, -1, 1)\, dudv$$

$$= \iint_{u^2+2v^2 \leq 2, u \geq 0} (v^2 - 3uv^2)\, dudv$$

(Gör substitutionen $s = \frac{1}{\sqrt{2}}u$, $t = v \iff u = \sqrt{2}s$, $v = t$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = \sqrt{2}$, och $u^2 + 2v^2 \leq 2$, $u \geq 0$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 1$, $s \geq 0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 1, s \geq 0} \left(t^2 - 3\sqrt{2}st^2\right) \left|\sqrt{2}\right|\, dsdt$$

$$= \sqrt{2} \iint_{s^2+t^2 \leq 1, s \geq 0} t^2\, dsdt - 6 \iint_{s^2+t^2 \leq 1, s \geq 0} st^2\, dsdt$$

(Eftersom t^2 är jämn i s och området $s^2 + t^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\iint_{s^2+t^2\le 1} t^2\,dsdt - 6\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} st^2\,dsdt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{s^2+t^2\le 1} t^2\,dsdt - 6\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} st^2\,dsdt$$

(Eftersom området $s^2+t^2\le 1$ är symmetriskt i s och t.)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{s^2+t^2\le 1} \frac{1}{2}(s^2+t^2)\,dsdt - 6\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} st^2\,dsdt$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\iint_{s^2+t^2\le 1} \left(s^2+t^2\right)\,dsdt - 6\iint_{s^2+t^2\le 1, s\ge 0} st^2\,dsdt$$

(Inför polära koordinater $s=r\cos\theta$, $t=r\sin\theta$.)

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta<2\pi}} r^2\,r\,dr\,d\theta - 6\iint_{\substack{0\le r\le 1\\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}}} (r\cos\theta)\,(r\sin\theta)^2\;r\,dr\,d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\int_0^1 r^3\,dr - 6\int_0^1 r^4\,dr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 - 6\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1\left[\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}-\frac{4}{5}.$$

En parametrisering av γ_1 är $x=0$, $y=t$, $z=1+t$, $-1\le t\le 1$, och den ger att

(2) $$\int_{\gamma_1}(xy^3+x^5+z^5)\,dx+(xy^2-x^5+z^5)\,dy+(x^5+z^5)\,dz$$

$$= \int_{-1}^1\left(0+(1+t)^5\cdot 1+(1+t)^5\cdot 1\right)dt = 2\int_{-1}^1(1+t)5\,dt = 2\left[\frac{1}{6}(1+t)^6\right]_{-1}^1 = \frac{64}{3}$$

Av (1) och (2) följer att

$$\int_\gamma(xy^3+x^5+z^5)\,dx+(xy^2-x^5+z^5)\,dy+(x^5+z^5)\,dz = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}-\frac{4}{5}+\frac{64}{3} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}+\frac{308}{15}.$$

Den givna kurvintegralen kan också beräknas genom att på lämpligt sätt införa en parameterframställning av den angivna kurvan γ. Av ekvivalensen $x^2+2y^2=2 \iff \frac{1}{2}x^2+y^2=1$ och beskrivningen av γ följer att

$$x=\sqrt{2}\cos t,\;\; y=\sin t,\;\; z=1+\sqrt{2}\cos t+\sin t,\;\; -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

är en parametrisering av γ. Vi får att

$$\int_\gamma(xy^3+x^5+z^5)\,dx+(xy^2-x^5+z^5)\,dy+(x^5+z^5)\,dz =$$

(Enligt den införda parametriseringen av kurvan γ.)

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\Bigg(\left(\sqrt{2}\cos t\sin^3 t+4\sqrt{2}\cos^5 t+\left(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\right)^5\right)(-\sqrt{2}\sin t)$$
$$+\left(\sqrt{2}\cos t\sin^2 t-4\sqrt{2}\cos^5 t+\left(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\right)^5\right)\cos t$$
$$+\left(4\sqrt{2}\cos^5 t+\left(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\right)^5\right)(-\sqrt{2}\sin t+\cos t)\Bigg)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-2\cos t\sin^4 t - 8\cos^5 t\sin t + \big(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\big)^5(-\sqrt{2}\sin t)$$

$$+\sqrt{2}\cos^2 t\sin^2 t - 4\sqrt{2}\cos^6 t + \big(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\big)^5\cos t$$

$$-8\cos^5 t\sin t + 4\sqrt{2}\cos^6 t + \big(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\big)^5(-\sqrt{2}\sin t+\cos t)\Big)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-2\cos t\sin^4 t - 16\cos^5 t\sin t + \sqrt{2}\cos^2 t\sin^2 t$$

$$+2\big(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\big)^5(-\sqrt{2}\sin t+\cos t)\Big)\,dt$$

(Vi använder att

$$\cos^2 t\sin^2 t = \frac{1}{4}\big(2\cos t\sin t\big)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2t = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4t) = \frac{1}{8}(1-\cos 4t).)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Big(-2\cos t\sin^4 t - 16\cos^5 t\sin t + \frac{\sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{2}}{8}\cos 4t$$

$$+2\big(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\big)^5(-\sqrt{2}\sin t+\cos t)\Big)\,dt$$

$$= \left[-\frac{2}{5}\sin^5 t + \frac{8}{3}\cos^6 t + \frac{\sqrt{2}}{8}t - \frac{\sqrt{2}}{32}\sin 4t + \frac{1}{3}\big(1+\sqrt{2}\cos t+\sin t\big)^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{2}{5} + 0 + \frac{\sqrt{2}\,\pi}{16} - 0 + \frac{64}{3} - \left(\frac{2}{5} + 0 - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{16} - 0 + 0\right) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8} + \frac{308}{15}.$$

2. Vi motiverar först att f har ett största och ett minsta värde i mängden A. Mängden A är kompakt, se nedan. Funktionen $f(x,y) = x^2+xy+y^2$ är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^2$ och således speciellt kontinuerlig i A. Det följer därför av sats om kontinuerliga funktioner att f har ett största och ett minsta värde i A. Att A verkligen är kompakt kan fås såhär. Funktionen $g(x,y)$ är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^2$, och alltså är mängden $B = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid g(x,y)=0\}$ sluten. Mängden $C = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x\ge 0, y\ge 0\}$ är också sluten, och eftersom $A = B\cap C$ och snitt av slutna mängder alltid är en sluten mängd så är mängden A sluten. Vidare har vi att

$$(x,y)\in A \iff 2x^3+3x^2y+6xy^2+y^3=12,\ x\ge 0,\ y\ge 0 \implies$$

$$2x^3\le 12,\ y^3\le 12,\ x\ge 0,\ y\ge 0 \iff 0\le x\le 6^{1/3},\ 0\le y\le 12^{1/3},$$

och alltså är A även begränsad. Mängden A är således både sluten och begränsad och alltså kompakt.

Vi motiverar därefter att f har ett minsta men inget största värde i mängden B. Vi noterar att punkten $(0,12^{1/3})\in B$ och att $f(0,12^{1/3}) = 12^{2/3}$. Låt D vara mängden $x^2+xy+y^2\le 12^{2/3}$. Mängden D är sluten. (Mängden $\complement D$ (komplementet till D), mängden $x^2+xy+y^2 > 12^{2/3}$, är ju uppenbarligen öppen.) Vidare noterar vi att

$$x^2+xy+y^2\le 12^{2/3} \iff \left(y+\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 \le 12^{1/3} \implies \frac{3}{4}x^2\le 12^{1/3} \iff |x|\le\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 12^{1/6}$$

och att

$$x^2 + xy + y^2 \le 12^{2/3} \iff \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \le 12^{1/3} \implies \frac{3}{4}y^2 \le 12^{1/3} \iff |y| \le \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 12^{1/6}.$$

Mängden D är således också begränsad. Följande gäller alltså nu.

i) Mängden $B \cap D$ är kompakt. Det följer av att B och D är slutna samt av att D är begränsad.

ii) Funktinen f är kontinuerlig i $B \cap D$. Det följer av att f är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^2$.

iii) Punkten $(0, 12^{1/3}) \in B \cap D$ och $f(0, 12^{1/3}) = 12^{2/3}$. Det följer av definitionen av mängden D.

iv) Funktionen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 > 12^{2/3}$ för alla $(x, y) \in B \cap \complement D$. Det följer av definitionen av mängden D.

Av i) och ii) framgår att f har ett minsta värde i $B \cap D$, av iii) framgår att detta minsta värde är $\le 12^{2/3}$, och av iv) framgår sedan att detta minsta värde av f i $B \cap D$ också är minsta värde till f i hela B. Funktionen f har således ett minsta värde i B. Det återstår att motivera att f saknar största värde i B. Vi har att $(x, y) \in B \iff 2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + y^3 = 12$. Varje reell tredjegradsekvation har minst en reell rot. För varje reellt tal y finns det således minst ett reellt tal x sådant att $2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + y^3 = 12$. Låt x_y vara ett sådant reellt tal. Då gäller att $(x_y, y) \in B$ för godtyckligt reellt tal y och att

$$f(x_y, y) = (x_y)^2 + x_y y + y^2 = \left(x_y + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \ge \frac{3}{4}y^2, \quad \text{som} \to \infty \text{ då } y \to \infty.$$

Funktionen f har alltså inget största värde i B.

Vi bestämmer nu största och minsta värdet av f i A, minsta värdet av f i B, samt varje punkt där dessa värden antas.

Vi börjar med största och minsta värdet av f i A. Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller att varje punkt där största eller minsta värdet av f i A antas finns med bland punkterna i a1), a2) och a3) nedan.

a1) Punkter $(x, y) \in A$ sådana att $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende.
Derivering ger

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y) \text{ och } \nabla g(x, y) = 3\big(2(x^2 + xy + y^2), x^2 + 4xy + y^2\big).$$

Enligt teorin för determinanter är två vektorer i $\mathbf{R}^2$ linjärt beroende om och endast om deras determinant är 0. Det följer att $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende $\iff$

$$\begin{vmatrix} 2x + y & x + 2y \\ 2(x^2 + xy + y^2) & x^2 + 4xy + y^2 \end{vmatrix} = 0 \iff (2x+y)\cdot(x^2+4xy+y^2) - (x+2y)\cdot 2(x^2+xy+y^2) = 0$$

$$\iff 3x^2y - 3y^3 = 0 \iff y(x - y)(x + y) \iff (y = 0) \vee (y = x) \vee (y = -x).$$

Av $y = 0$, $y = x$ respektive $y = -x$ insatt i $g(x, y) = 0$ fås $2x^3 = 12$, $12x^3 = 12$ respektive $4x^3 = 12$, dvs $x = 6^{1/3}$, $x = 1$ respektive $x = 3^{1/3}$. Samtliga punkter där $g(x, y) = 0$ samt $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende är alltså punkterna $(6^{1/3}, 0)$, $(1, 1)$ och $(3^{1/3}, -3^{1/3})$. De två första av dessa punkter ligger i A medan den tredje punkten inte gör det. Det finns således exakt två punkter i A där $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende och det är punkterna $\big(6^{1/3}, 0\big)$ och $(1, 1)$. Motsvarande funktionsvärden är $f(6^{1/3}, 0) = 6^{2/3}$ och $f(1, 1) = 3$.

a2) Ändpunkter (relativa randpunkter) till kurvan A.
I ändpunkter till A gäller $x = 0$ eller $y = 0$. Av $x = 0$ insatt i $g(x, y) = 0$ fås $y^3 = 12$, dvs $y = 12^{1/3}$. Punkten $\big(0, 12^{1/3}\big)$ ligger i A och är alltså ändpunkt till kurvan A. Motsvarande funktionsvärde är $f\left(0, 12^{1/3}\right) = 12^{2/3}$. Den ändpunkt till A där $y = 0$ finns med i a1) ovan.

a3) Punkter $(x, y) \in A$ sådana att någon av $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ ej existerar.
Sådana punkter finns ej.

Av a1), a2) och a3) framgår att största värdet av f i A är $\max\left(6^{2/3}, 3, 2 \cdot 12^{2/3}\right)$ och att minsta värdet av f i A är $\min\left(6^{2/3}, 3, 12^{2/3}\right)$. Eftersom

$$6^{2/3} = 36^{1/3}, \quad 3 = 27^{1/3}, \quad 12^{2/3} = 144^{1/3}.$$

är följaktligen $12^{2/3}$ och 3 största respektive minsta värdet av f i A. Största värdet av f i A antas i punkten $\left(0, 12^{1/3}\right)$ och minsta värdet av f i A antas i punkten $(1, 1)$.

Vi övergår nu till minsta värdet av f i B. Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller att varje punkt där minsta värdet av f i B antas finns med bland punkterna i b1), b2) och b3) nedan.

b1) Punkter $(x, y) \in B$ sådana att $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende.
Enligt punkten a1) ovan gäller följande. Samtliga punkter där $g(x, y) = 0$ samt $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende är punkterna $(6^{1/3}, 0)$, $(1, 1)$ och $(3^{1/3}, -3^{1/3})$. Det finns således exakt tre punkter i B där $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ är linjärt beroende och det är dessa tre punkter. Motsvarande funktionsvärden är $f(6^{1/3}, 0) = 6^{2/3}$, $f(1, 1) = 3$ och $f\left(3^{1/3}, -3^{1/3}\right) = 3^{2/3}$.

b2) Ändpunkter (relativa randpunkter) till kurvan B.
Sådana punkter finns ej.

b3) Punkter $(x, y) \in B$ sådana att någon av $\nabla f(x, y)$ och $\nabla g(x, y)$ ej existerar.
Sådana punkter finns ej.

Av b1), b2) och b3) framgår att minsta värdet av f i B är $\min\left(6^{2/3}, 3, 3^{2/3}\right)$. Eftersom

$$6^{2/3} = 36^{1/3}, \quad 3 = 27^{1/3}, \quad 3^{2/3} = 9^{1/3}.$$

är följaktligen $3^{2/3}$ minsta värdet av f i B. Minsta värdet av f i B antas i punkten $(3^{1/3}, -3^{1/3})$.

3. a) Den givna generaliserade integralen är en positiv generaliserad integral som är generaliserad på två sätt. Dels genom att integranden är odefinierad i $x = 0$, och dels genom att övre integrationsgränsen är ∞. Vi gör därför en uppdelning

$$\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^{5/3}}\, dx = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x^{5/3}}\, dx + \int_1^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^{5/3}}\, dx.$$

Vidare har vi att

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^{5/3}} \Big/ \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1 - \left(1 - x + O(x^2)\right)}{x} = 1 + O(x) \to 1 + 0 = 1 \quad \text{då } x \to 0^+$$

och att

$$\frac{1 - e^{-x}}{x^{5/3}} \Big/ \frac{1}{x^{5/3}} = 1 - e^{-x} \to 1 - 0 = 1 \quad \text{då } x \to \infty$$

och eftersom

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\, dx \quad \text{och} \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^{5/3}}\, dx$$

är två positiva generaliserade standardintegraler så följer av jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler att de båda delintegralerna i uppdelningen ovan är konvergenta. Den givna generaliserade integralen är följaktligen konvergent.

b) Enligt summaformeln för en ändlig geometrisk serie gäller att

$$\sum_{k=0}^{n} a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \text{ om } a \neq 1, \text{ och } \sum_{k=0}^{n} a^n = n + 1 \text{ om } a = 1,$$

samt att

$$\sum_{k=0}^{n} a^{2n} = \frac{\left(a^2\right)^{n+1} - 1}{a^2 - 1} = \frac{\left(a^{n+1}\right)^2 - 1}{a^2 - 1} = \frac{\left(a^{n+1} + 1\right)\left(a^{n+1} - 1\right)}{(a+1)(a-1)} \text{ om } a \neq \pm 1,$$

$$\text{och } \sum_{k=0}^{n} a^{2n} = n + 1 \text{ om } a = \pm 1.$$

Det följer att

$$b_n = \frac{a+1}{a^{n+1}+1} \text{ om } a \neq \pm 1,\ b_n = \frac{1 + (-1)^n}{2(n+1)} \text{ om } a = -1 \text{ och } b_n = 1 \text{ om } a = 1. \tag{3}$$

Fallet $-1 < a < 1$. Då gäller att $a^n \to 0$ då $n \to \infty$. Enligt (3) har vi i detta fall således att

$$b_n = \frac{a+1}{a^{n+1}+1} \to \frac{a+1}{0+1} = a + 1 \neq 0 \quad \text{då } n \to \infty$$

Serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är således divergent i detta fall.

Fallet $a = -1$. Av (3) får vi i detta fall att

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{2(n+1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1},$$

och eftersom

$$\frac{1}{2m+1} \Big/ \frac{1}{m} = \frac{1}{2 + \frac{1}{m}} \to \frac{1}{2} \text{ då } m \to \infty$$

och serien $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ är en positiv divergent standardserie så följer av ett jämförelsekriterium för positiva serier att serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent i detta fall.

Fallet $a = 1$. Enligt (3) gäller i detta fall att $b_n = 1$ för alla heltal $n \geq 1$. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är således divergent i detta fall.

Fallet $|a| > 1$. Då gäller att $\frac{1}{a^n} \to 0$ då $n \to \infty$. Av (3) får vi i detta fall således att

$$|b_n| \Big/ \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = \left|\frac{a+1}{a + \frac{1}{a^n}}\right| \to \left|\frac{a+1}{a}\right| \neq 0 \quad \text{då } n \to \infty$$

och eftersom serien $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n$ är en konvergent positiv geometrisk serie om $|a| > 1$ så följer av ett jämförelsekriterium för positiva serier att serien $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ är konvergent i detta fall. Men absolutkonvergens medför konvergens. Serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är således konvergent i detta fall.

Sammanfattningsvis gäller således för reella tal a att serien $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent om och endast om $|a| > 1$.

4. Sätt $z = e^{i\theta}$. Tillsammans med Eulers formel för sinusfunktionen ger det att

$$\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) \text{ och } \sin n\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right).$$

Vi har också att

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz, \text{ som ger } d\theta = \frac{1}{iz}\, dz$$

Vidare övergår intervallet $[0, 2\pi[$ genom sambandet $z = e^{i\theta}$ i den angivna kurvan γ i det komplexa talplanet. Följaktligen har vi att

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n\theta}{5 + 3\sin\theta}\, d\theta = \int_\gamma \frac{\left(\frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)\right)^2}{5 + \frac{3}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)} \frac{1}{iz}\, dz$$

$$= \frac{1}{6}\int_\gamma \frac{2 - z^n - z^{-n}}{z^2 + \frac{10}{3}iz - 1}\, dz = \frac{1}{6}\int_\gamma \frac{2 - z^n - z^{-n}}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)}\, dz$$

$$= \frac{1}{6}\int_\gamma \frac{2 - z^{2n}}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)}\, dz - \frac{1}{6}\int_\gamma \frac{1}{z^{2n}\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)}\, dz$$

$$= \frac{1}{6}\int_\gamma f(z)\, dz - \frac{1}{6}\int_\gamma g(z)\, dz$$

där

$$f(z) = \frac{2 - z^{2n}}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)} \quad \text{och} \quad g(z) = \frac{1}{z^{2n}\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)}.$$

Kurvan γ i det komplexa talplanet är cirkeln $|z| = 1$ ett varv moturs. Nämnaren i f(z), polynomet $\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)$, har nollstället $-\frac{1}{3}i$ innanför γ och nollstället $-3i$ utanför γ. Nämnaren i $g(z)$, polynomet $z^{2n}\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z + 3i)$, har nollställena 0 och $-\frac{1}{3}i$ innanför γ och nollstället $-3i$ utanför γ. Enligt sats om analytiska funktioner gäller därför att

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, Res\left(f(z), -\frac{1}{3}i\right)$$

och att

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 2\pi i\left(Res\,(g(z), 0) + Res\left(g(z), -\frac{1}{3}i\right)\right).$$

För att beräkna dessa residyvärden använder vi följande. Låt $h(z) = \frac{1}{(z-c)^r}k(z)$ där $c \in \mathbf{C}$, $r \in \mathbf{Z}_+$ och $k(z)$ är analytisk i en omgivning av punkten c. Att $k(z)$ är analytisk i en omgivning av punkten c medför att $k(z) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{1}{\nu!}k^{(\nu)}(c)(z-c)^\nu$ i någon öppen cirkelskiva med medelpunkt i c, och således gäller i cirkelskivan att

$$h(z) = \frac{1}{(z-c)^r}k(z) = \frac{1}{(z-c)^r}\sum_{\nu=0}^\infty \frac{1}{\nu!}k^{(\nu)}(c)(z-c)^\nu$$

$$= \frac{1}{(z-c)^r}\left(k(c) + \frac{1}{1!}k'(c)(z-c) + \ldots + \frac{1}{(r-1)!}k^{(r-1)}(c)(z-c)^{r-1} + \ldots\right)$$

$$= k(c)(z-c)^{-r} + + \frac{1}{1!}k'(c)(z-c)^{-r+1} + \ldots + \frac{1}{(r-1)!}k^{(r-1)}(c)(z-c)^{-1} + \ldots\,.$$

Det följer att

$$Res\left(\frac{1}{((z-c)^r}k(z), c\right) = \frac{1}{(r-1)!}k^{(r-1)}(c) \quad \text{för } r = 1, 2, \ldots.$$

Residyformeln med $r = 1$ ger

$$Res\left(f(z), -\frac{1}{3}i\right) = \frac{2 - z^{2n}}{z + 3i}\bigg|_{z=-\frac{1}{3}i} = \frac{2 - (3i)^{-2n}}{-\frac{1}{3}i + 3i} = \frac{3}{8i}\left(2 - \frac{(-1)^n}{3^{2n}}\right)$$

och

$$Res\left(g(z), -\frac{1}{3}i\right) = \frac{1}{z^{2n}(z + 3i)}\bigg|_{z=-\frac{1}{3}i} = \frac{1}{(3i)^{-2n}\left(-\frac{1}{3}i + 3i\right)} = \frac{3}{8i}(-1)^n(3)^{2n}$$

Residyformeln med $r = 2n$ ger

$$Res\big(g(z), 0\big) = \frac{1}{(2n-1)!} D^{2n-1} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z+3i)}\Big|_{z=0}.$$

För att enkelt kunna beräkna

$$D^{2n-1} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z+3i)}$$

partialbråksuppdelar vi först

$$\frac{1}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z+3i)}.$$

Partialbråksuppdelning med övertäckningsmetoden ger att

$$\frac{1}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z+3i)} = \frac{A_1}{z + \frac{1}{3}i} + \frac{A_2}{z+3i}$$

där

$$A_1 = \frac{1}{z+3i}\Big|_{z=-\frac{1}{3}i} = \frac{3}{8i}, \quad \text{och} \quad A_2 = \frac{1}{z+\frac{1}{3}i}\Big|_{z=-3i} = -\frac{3}{8i}$$

Dvs vi har att

$$\frac{1}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z+3i)} = \frac{3}{8i}\left(\frac{1}{z+\frac{1}{3}i} - \frac{1}{z+3i}\right).$$

Nu är det enkelt att derivera. Vi får att

$$D^{2n-1} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z+3i)} = \frac{3}{8i} D^{2n-1}\left(\frac{1}{z+\frac{1}{3}i} - \frac{1}{z+3i}\right)$$

$$= \frac{3}{8i}(-1)^{2n-1}(2n-1)!\left(\frac{1}{\left(z+\frac{1}{3}i\right)^{2n}} - \frac{1}{(z+3i)^{2n}}\right)$$

och alltså att

$$Res\big(g(z), 0\big) = \frac{1}{(2n-1)!} D^{2n-1} \frac{1}{\left(z + \frac{1}{3}i\right)(z+3i)}\Big|_{z=0}$$

$$= -\frac{3}{8i}\left(\frac{1}{\left(z+\frac{1}{3}i\right)^{2n}} - \frac{1}{(z+3)i^{2n}}\right)\Big|_{z=0}$$

$$= -\frac{3}{8i}(-1)^n 3^{2n} + \frac{3}{8i}(-1)^n 3^{-2n}.$$

Vid deriveringen här använder vi att

$$D^r \frac{1}{z+c} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-r)}{(z+c)^{r+1}} = (-1)^r\, r!\, \frac{1}{(z+c)^{r+1}} \quad \text{för } r = 1, 2, \ldots .$$

Alla residyvärden som behövs ovan är nu beräknade. Med hjälp av dessa residyvärden får vi att

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, Res\left(f(z), -\frac{1}{3}i\right) = 2\pi i \cdot \frac{3}{8i}\left(2 - \frac{(-1)^n}{3^{2n}}\right) = \frac{3\pi}{4}\left(2 - \frac{(-1)^n}{3^{2n}}\right)$$

och att

$$\int_\gamma g(z)\, dz = 2\pi i\left(Res\left(g(z), 0\right) + Res\left(g(z), -\frac{1}{3}i\right)\right)$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{3}{8i}(-1)^n 3^{2n} + \frac{3}{8i}(-1)^n 3^{-2n} + \frac{3}{8i}(-1)^n (3)^{2n}\right) = \frac{3\pi}{4}(-1)^n 3^{-2n}.$$

Således har vi att

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 n\theta}{5+3\sin\theta}\,d\theta = \frac{1}{6}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{6}\int_\gamma g(z)\,dz$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3\pi}{4}\left(2-\frac{(-1)^n}{3^{2n}}\right) - \frac{1}{6}\cdot\frac{3\pi}{4}(-1)^n 3^{-2n} = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{(-1)^n}{3^{2n}}\right).$$

5. Sätt

$$P(x,y) = \frac{\cos y}{1+\sin x\sin y} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{\cos x}{1+\sin x\sin y}.$$

Vi har att $-1 \le \sin u \le 1$ för alla $u \in \mathbf{R}$. Det följer att $1+\sin x\sin y = 0$ endast då $\sin x = 1$ och $\sin y = -1$ samt då $\sin x = -1$ och $\sin y = 1$, dvs endast då $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2}+2m\pi, -\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $m,n \in \mathbf{Z}$, samt då $(x,y) = \left(-\frac{\pi}{2}+2m\pi, \frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$, $m,n \in \mathbf{Z}$. Låt M vara mängden av alla dessa punkter. Funktionerna P och Q samt alla deras derivator är väldefinierade på $\mathbf{R}^2 \setminus M$. Derivering visar att $P_2' = Q_1'$ på $\mathbf{R}^2 \setminus M$.

Låt γ_3 vara räta linjen från punkten $(0,0)$ till punkten $(2\pi,0)$, och låt γ_4 vara räta linjen från punkten $(2\pi,0)$ till punkten $\left(2\pi,\frac{\pi}{2}\right)$. Kurvan $(-\gamma_1)\cup\gamma_3\cup\gamma_4$ är en enkel sluten positivt orienterad kurva. Alla punkterna i M ligger utanför denna slutna kurva. Låt A vara denna slutna kurvas inre. Då gäller enligt Greens formel att

$$-\int_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy + \int_{\gamma_3} P\,dx+Q\,dy + \int_{\gamma_4} P\,dx+Q\,dy = \iint_A (Q_1'-P_2')\,dxdy = \iint_A 0\,dxdy = 0.$$

Vi får att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy = \int_{\gamma_3} P\,dx+Q\,dy + \int_{\gamma_4} P\,dx+Q\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \frac{5\pi}{2}.$$

Låt γ_5 vara räta linjen från punkten $(0,0)$ till punkten $(4\pi,0)$, och låt γ_6 vara räta linjen från punkten $(4\pi,0)$ till punkten $(4\pi,\pi)$. Kurvan $(-\gamma_2)\cup\gamma_5\cup\gamma_6$ är en enkel sluten positivt orienterad kurva. Punkten $\left(\frac{7\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ från M ligger innanför denna kurva och alla andra punkter från M ligger utanför denna kurva. Låt γ_7 vara en cirkel med medelpunkt i $\left(\frac{7\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ och mycket liten radie ett varv moturs. Låt B vara området utanför γ_7 men innanför $(-\gamma_2)\cup\gamma_5\cup\gamma_6$. Då är $(-\gamma_2)\cup\gamma_5\cup\gamma_6\cup(-\gamma_7)$ den postivt orienterade randen till B. Enligt Greens formel gäller därför att

$$-\int_{\gamma_2} P\,dx+Q\,dy + \int_{\gamma_5} P\,dx+Q\,dy + \int_{\gamma_6} P\,dx+Q\,dy - \int_{\gamma_7} P\,dx+Q\,dy$$

$$= \iint_B (Q_1'-P_2')\,dxdy = \iint_B 0\,dxdy = 0.$$

Vi får att

$$\int_{\gamma_2} P\,dx+Q\,dy = \int_{\gamma_5} P\,dx+Q\,dy + \int_{\gamma_6} P\,dx+Q\,dy - \int_{\gamma_7} P\,dx+Q\,dy \tag{4}$$

$$= \int_0^{4\pi} dx + \int_0^{\pi} dy - \int_{\gamma_7} P\,dx+Q\,dy = 5\pi - \int_{\gamma_7} P\,dx+Q\,dy.$$

Låt γ_8 vara räta linjen från punkten $(3\pi,\pi)$ till punkten $(4\pi,\pi)$, låt γ_9 vara räta linjen från punkten $(3\pi,0)$ till punkten $(3\pi,\pi)$ och låt γ_{10} vara räta linjen från punkten $(3\pi,0)$ till punkten $(4\pi,0$. Kurvan $\gamma_6\cup(-\gamma_8)\cup(-\gamma_9)\cup\gamma_{10}$ är en enkel sluten positivt orienterad kurva med punkten $\left(\frac{7\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ från M i sitt inre. Låt C vara området utanför γ_7 men innanför $\gamma_6\cup(-\gamma_8)(-\gamma_9)\cup\gamma_{10}$. Då är kurvan $\gamma_6\cup(-\gamma_8)(-\gamma_9)\cup\gamma_{10}\cup(-\gamma_7)$ den postivt orienterade randen till C. Inga punkter från M ligger i C eller på dess rand. Enligt Greens formel gäller därför att

$$\int_{\gamma_6} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_8} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_9} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_{10}} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_7} P\,dx + Q\,dy$$
$$= \iint_C (Q_1' - P_2')\,dxdy = \iint_C 0\,dxdy = 0.$$

Vi får att

$$\int_{\gamma_7} P\,dx + Q\,dy = \int_{\gamma_6} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_8} P\,dx + Q\,dy - \int_{\gamma_9} P\,dx + Q\,dy + \int_{\gamma_{10}} P\,dx + Q\,dy \tag{5}$$
$$= \int_0^{\pi} dy - \int_{3\pi}^{4\pi} (-1)\,dx - \int_0^{\pi} (-1)\,dy + \int_{3\pi}^{4\pi} dx = 4\pi.$$

Av (4) och (5) följer att

$$\int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 5\pi - 4\pi = \pi.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.