MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys IV
140222

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $(x+z)^2+(y+z)^2=1$ där $0\le z\le 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F}=(x^2+y^4, x^4+y^2, xyz)$. 10 p

2. Visa att det finns en entydigt bestämd potensserie kring origo $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ med konvergensradie >0 som uppfyller differentialekvationen $xy''+y=0$ samt bivillkoret $y''(0)=1$. Ange denna potensserie och dess konvergensradie. Visa också att det inte finns någon potensserie kring origo $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ med konvergensradie >0 som uppfyller differentialekvationen $x^3y''+xy'-2y=0$ samt bivillkoret $y''(0)=1$. 10 p

3. a) Låt kurvan γ i det komplexa talplanet $\mathbf{C}$ vara cirkeln $|z|=2$ ($z\in\mathbf{C}$) ett varv moturs. Beräkna den komplexa kurvintegralen $\displaystyle\int_\gamma \frac{z+2}{z^3+4z^2+3z}\,dz$. 5 p

   b) Låt n vara ett heltal ≥ 1. Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ uttryckt i n. 5 p

4. Avgör om funktionen $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ har något största eller minsta värde på mängden $x^3+y^3+z^3+5x^2+5y^2+5z^2=12$ och bestäm i förekommande fall största/minsta värdet. Ange i förekommande fall också varje punkt där ett sådant värde antas. 10 p

5. Betrakta kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ där

$$P(x,y)=-\frac{x^6y}{x^8+x^4y^4+y^8} \quad \text{och} \quad Q(x,y)=\frac{x^7}{x^8+x^4y^4+y^8}.$$

   Kurvintegralen är definierad för kurvor γ i området $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x,y)\ne(0,0)\}$. Visa att $P_2'(x,y)=Q_1'(x,y)$ för alla $(x,y)\in D$. Visa att kurvintegralen inte är oberoende av vägen för kurvor γ i området D. Beräkna kurvintegralens värde då γ är kurvan $4x^2+y^2=4$, $y\ge 0$, från punkten $(1,0)$ till punkten $(-1,0)$. 10 p

Teoridel

Välj <u>en av</u> följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa Greens formel för områden i planet med *en* under- och *en* överdel och *en* vänster- och *en* högerdel. Skissera sedan hur Greens formel kan fås för mera allmänna områden i planet. 10 p

7. (Absolutkonvergens medför konvergens.) Låt $a_1, a_2, a_3, \dots$ vara en oändlig följd av komplexa tal. Visa att $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergent. 10 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning må 3/3 kl 10.30-10.45 i rum 328 hus 6, därefter i rum 204 hus 6.