Lösningar till Matematisk analys IV, 140222

1. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 0$ där $x^2 + y^2 \leq 1$, och låt Y_2 vara den del av planet $z = 1$ där $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1 och $\mathbf{N}_2$ den utåtriktade enhetsnormalen till Y_2, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz. \tag{1}$$

På ytan Y_1 är $\mathbf{F} = (x^2 + y^4, x^4 + y^2, 0)$ och $\mathbf{N}_1 = (0, 0, -1)$. Dvs $\mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1 = 0$ på hela Y_1, och alltså är

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = 0. \tag{2}$$

En parametrisering av ytan Y_2 är $x = u$, $y = v$, $z = 1$, där $(u+1)^2 + (v+1)^2 \leq 1$. Med $\mathbf{r}(u, v) = \big(u, v, 1\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u, v) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{r}_2'(u, v) = (0, 1, 0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u, v) \times \mathbf{r}_2'(u, v) = (0, 0, 1),$$

och vi noterar att ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u, v) \times \mathbf{r}_2'(u, v)$ till Y_2 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \iint_{Y_2} (x^2 + y^4, x^4 + y^2, xyz) \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \tag{3}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_2.)

$$+ \iint_{(u+1)^2+(v+1)^2 \leq 1} \big(u^2 + v^4, u^4 + v^2, uv\big) \cdot (0, 0, 1)\ dudv = \iint_{(u+1)^2+(v+1)^2 \leq 1} uv\, dudv =$$

(Gör substitutionen $s = u + 1$, $t = v + 1 \iff u = s - 1$, $v = t - 1$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = 1$, och $(u+1)^2 + (v+1)^2 \leq 1$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 1$.)

$$\iint_{s^2+t^2 \leq 1} (s-1)(t-1)|1|\, dsdt = \iint_{s^2+t^2 \leq 1} (st - s - t + 1)\ dsdt =$$

(Eftersom $st - s$ är udda i s och området $s^2 + t^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$\iint_{s^2+t^2 \leq 1} (-t + 1)\ dsdt =$$

(Eftersom $-t$ är udda i t och området $s^2 + t^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $t = 0$.)

$$\iint_{s^2+t^2 \leq 1} dsdt = \text{area}(s^2 + t^2 \leq 1) = \pi.$$

Vidare är $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 2y + xy$ och D är mängden $(x+z)^2 + (y+z)^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, och vi får att

$$\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_D (2x + 2y + xy)\, dxdydz = \tag{4}$$

$$\int_0^1 \left(\iint_{(x+z)^2+(y+z)^2\le 1} (2x+2y+xy)\,dxdy \right) dz.$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

(5) $$\iint_{(x+z)^2+(y+z)^2\le 1} (2x+2y+xy)\,dxdy =$$

(Gör substitutionen $u = x+z$, $v = y+z \iff x = u-z$, $y = v-z$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = 1$, och $(x+z)^2+(y+z)^2 \le 1$ övergår i $u^2+v^2 \le 1$.)

$$\iint_{u^2+v^2\le 1} (2(u-z)+2(v-z)+(u-z)(v-z))\,|1|\,dudv =$$

$$\iint_{u^2+v^2\le 1} \left(uv+2u-uz+2v-vz+z^2-4z\right) dudv =$$

(Eftersom $uv+2u-uz$ är udda i u och området $u^2+v^2\le 1$ är symmetriskt kring $u=0$.)

$$\iint_{u^2+v^2\le 1} \left(2v-vz+z^2-4z\right) dudv =$$

(Eftersom $2v-vz$ är udda i v och området $u^2+v^2\le 1$ är symmetriskt kring $v=0$.)

$$\iint_{u^2+v^2\le 1} \left(z^2-4z)\right) dudv = \left(z^2-4z)\right) \iint_{u^2+v^2\le 1} dudv =$$

$$(z^2-4z)\text{area}(u^2+v^2\le 1) = (z^2-4z)\pi$$

Insättning av (5) i (4) ger att

(6) $$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\,dxdydz = \pi\int_0^1 \left(z^2-4z\right) dz = \pi\left[\frac{1}{3}z^3-2z^2\right]_0^1 = -\frac{5\pi}{3}.$$

Av (1), (2) och (3) och (6) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = -\frac{5\pi}{3} - 0 - \pi = -\frac{8\pi}{3}.$$

2. Vi behandlar först differentialekvationen

(7) $$xy''+y=0$$

med bivillkoret $y''(0)=1$. Antag att

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

där potensserien har konvergensradie > 0. Eftersom sådana potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y'/x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ och att } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_k x^{n-2}.$$

Insättning i (7) ger sedan att

(8) $$x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Men

$$x\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}}_{\text{Sätt } m=n-1} =$$

$$\underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)ma_{m+1}x^m}_{\text{Byt } m \text{ mot } n} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^n.$$

Sambandet (8) kan därför skrivas

$$\sum_{n=0}^{\infty}\big((n+1)na_{n+1}+a_n\big)x^n = 0.$$

Vi får således att

$$(n+1)na_{n+1}+a_n = 0 \quad \text{för} \quad n=0,1,\ldots$$

och alltså att

$$a_0 = 0 \quad \text{samt} \quad a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)n}a_n \quad \text{för} \quad n=1,2,\ldots\ .$$

Av

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_k x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots$$

samt $y''(0)=1$ får vi vidare att $a_2=\frac{1}{2}$. Insättning av $n=1$ i $a_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)n}a_n$ ger $a_2=-\frac{1}{2}a_1$ som med $a_2=\frac{1}{2}$ ger $a_1=-1$. Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0,a_1,\ldots$ således att

(9) $$a_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)n}a_n, \quad n=1,2,\ldots$$

samt

$$a_0=0, \quad a_1=-1 \quad \text{och} \quad a_2=\frac{1}{2}.$$

Av $a_2=\frac{1}{2}$ och (9) följer att

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{1}{3\cdot 2}\,a_2 = -\frac{1}{3\cdot 2\cdot 2} = (-1)^3\,\frac{1}{3\cdot 2\cdot 2}\\
a_4 &= -\frac{1}{4\cdot 3}\,a_3 = (-1)^4\,\frac{1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2},\\
a_5 &= -\frac{1}{5\cdot 4}\,a_4 = (-1)^5\,\frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2},\\
&\ \vdots\,,
\end{aligned}$$

dvs att

$$a_n = (-1)^n\frac{1}{n!\cdot(n-1)!} \quad \text{för} \quad n=3,4,\ldots\ .$$

Notera här också att formeln för a_n även stämmer för $n=1$ och $n=2$. Vi har alltså att

(10) $$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot(n-1)!}\,x^n.$$

Potensseriens konvergensradie bestämmer vi med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n!\cdot(n-1)!}\,x^n \quad \text{för } n=1,2,\ldots.$$

Då gäller för $x \neq 0$ att

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{1}{(n+1)! \cdot n!}\, |x|^{n+1} \cdot n! \cdot (n-1)!\, \frac{1}{|x|^n} = \frac{|x|}{(n+1)n} \to 0 \quad \text{då} \quad n \to \infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $x \neq 0$ att den erhållna potensserielösningen (10) är absolutkonvergent för alla x. Potensserielösningen är alltså absolutkonvergent för alla x, och följaktligen är potensserielösningens konvergensradie ∞ (och den erhållna potensserielösningen är lösning till den givna diffrerentialekvationen på hela räta linjen. Det finns således en entydigt bestämd potensserie kring origo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergensradie > 0 som uppfyller (7) samt bivillkoret $y''(0) = 1$, och det är potensserien i (10).

Vi övergår nu till potensserien

$$x^3 y'' + xy' - 2y = 0 \tag{11}$$

med bivillkoret $y''(0) = 1$. Antag att

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

där potensserien har konvergensradie > 0. Eftersom sådana potensserier kan deriveras termvis ger derivering att

$$y'/x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \text{ och att } y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_k x^{n-2}.$$

Insättning i (11) ger sedan att

$$x^3 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{12}$$

Men

$$x^3 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n+1},$$

$$x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n}_{\text{Sätt } m = n-1} = \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) a_{m+1} x^{m+1} =}_{\text{Byt } m \text{ mot } n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1}$$

och

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{\text{Sätt } m = n-1} = \underbrace{\sum_{m=-1}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}}_{\text{Byt } m \text{ mot } n} = \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} =$$

Sambandet (12) kan därför skrivas

$$-2a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \big(n(n-1) a_n + (n-1) a_{n+1} \big) x^{n+1} = 0.$$

Vi får således att $a_0 = 0$ samt

$$n(n-1) a_n + (n-1) a_{n+1} = 0 \quad \text{för} \quad n = 0, 1, \ldots\ .$$

Insättning av $n = 0$ i $n(n-1)a_n + (n-1)a_{n+1} = 0$ ger $a_1 = 0$. Av

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_k x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + \ldots$$

samt $y''(0) = 1$ får vi vidare att $a_2 = \frac{1}{2}$. Villkoret $n(n-1)a_n + (n-1)a_{n+1} = 0$ är uppfyllt för $n = 1$. För heltal $n \geq 2$ kan $n(n-1)a_n + (n-1)a_{n+1} = 0$ skrivas $a_{n+1} = -na_n$ Sammanfattningsvis gäller för koefficienterna $a_0, a_1, \dots$ således att

$$a_{n+1} = -na_n, \quad n = 2, 3, \dots \tag{13}$$

samt

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0 \quad \text{och} \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Konvergensradien för motsvarande potensserie $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kan bestämmas direkt från (13) med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium. Sätt

$$b_n = a_n x^n \quad \text{för } n = 2, 3, \dots.$$

Av $a_2 = \frac{1}{2}$ och (13) följer att $a_n \neq 0$ för alla heltal $n \geq 2$. Kvoten $\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$ är således definierad för alla $x \neq 0$ och alla heltal $n \geq 2$. För $x \neq 0$ och heltal $n \geq 2$ får vi med hjälp av (13) att

$$\frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = n|x|, \quad \text{som} \to \infty \text{ då } n \to \infty \text{ för alla } x \neq 0,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller därför att den erhållna potensserien $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ är divergent för alla $x \neq 0$. Den erhållna potensserien här har således konvergensradie 0. Antagandet att det finns en potensserie $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergensradie > 0 som uppfyller (11) med bivillkoret $y''(0) = 1$ leder alltså till att potensserien har konvergensradie 0. Denna motsägelse visar att det inte finns någon potensserie kring origo $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med konvergensradie > 0 som uppfyller (11) samt bivillkoret $y''(0) = 1$.

3. a) Sätt $h(z) = \frac{z+2}{z^3+4z^2+3z}$. Då är $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ där $f(z) = z + 2$ och $g(z) = z^3 + 4z^2 + 3z$. Vi har att $z^3 + 4z^2 + 3z = z(z^2 + 4z + 3)$ och ekvationen $z^2 + 4z + 3 = 0$ har rötterna -1 och -3. Funktionen $g(z)$ har alltså nollställena $z_0 = 0$, $z_1 = -1$ och $z_2 = -3$. Nollställena z_0 och z_1 ligger innanför γ medan nollstället z_2 ligger utanför γ. Enligt sats om analytiska funktioner gäller därför att

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z^3+4z^2+3z}\,dz = \int_\gamma h(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{1} Res\,(h(z), z_k) = 2\pi i \sum_{k=0}^{1} Res\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_k\right)$$

I båda punkterna z_k, $k = 0, 1$ så är $f(z_k) = z_k + 2 \neq 0$, $g(z_k) = 0$ och $g'(z_k) = 3z_k^2 + 8z_k + 3 \neq 0$, och således har vi det enklaste fallet i vilket $Res\,(h(z), z_k) = Res\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_k\right) = \frac{f(z_k)}{g'(z_k)} = \frac{z_k+2}{3z_k^2+8z_k+3}$. Vi får att $Res\,(h(z), z_0) = \frac{2}{3}$ och att $Res\,(h(z), z_1) = -\frac{1}{2}$, vilket insatt ovan ger att

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z^3+4z^2+3z}\,dz = \frac{\pi i}{3}.$$

b) Integranden i den givna integralen är jämn och alltså har vi att

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx,$$

Integralen i högerledet beräknar vi med residyräkning. Sätt

$$h(z) = \frac{1}{(z^2+1)^n} = \frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}.$$

För $R > 1$ låt Γ_{1R} vara räta linjen från $-R$ till R och låt Γ_{2R} vara halvcirkeln $|z| = R$, $Im\,z \geq 0$, från R till $-R$, samt sätt $\gamma_R = \Gamma_{1R} \cup \Gamma_{2R}$. För godtyckligt $R > 1$ är då γ_R en enkel sluten positivt orienterad styckvis C^1-kurva sådan att nollstället i till nämnaren i $h(z)$ ligger innanför γ_R medan det andra nollstället $-i$ till nämnaren i $h(z)$ ligger utanför γ_R. Enligt sats om analytiska funktioner gäller därför att

$$\int_{\gamma_R} h(z)\,dz = 2\pi i Res\,(h(z),i) \quad \text{för alla } R>1,$$

vilket enligt definitionen av γ_R betyder att

$$\int_{\Gamma_{1R}} h(z)\,dz + \int_{\Gamma_{2R}} h(z)\,dz = 2\pi i Res\,(h(z),i) \quad \text{för alla } R>1.$$

Parametriseringen $z=t$, $-R \le t \le R$, av Γ_{1R} ger att

$$\int_{\Gamma_{1R}} h(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt.$$

Således gäller att

$$(14) \qquad \int_{-R}^{R} \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt + \int_{\Gamma_{2R}} h(z)\,dz = 2\pi i Res\,(h(z),i) \quad \text{för alla } R>1.$$

För varje $z \in \Gamma_{2R}$ där $R>1$ har vi $|z|=R$ där $R>1$ och därmed att

$$|h(z)| = \frac{1}{|z^2+1|^n} \le \frac{1}{(|z|^2-1)^n} = \frac{1}{(R^2-1)^n}$$

och eftersom Γ_{2R} har längd πR så gäller för varje $R>1$ att

$$\left| \int_{\Gamma_{2R}} h(z)\,dz \right| \le \frac{1}{(R^2-1)^n}\pi R, \quad \text{som} \to 0 \text{ då } R \to \infty.$$

Låter vi $R \to \infty$ i (14) får vi alltså att

$$(15) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = 2\pi i Res\,(h(z),i)\,.$$

Det återstår att beräkna residyvärdet ovan. För att beräkna detta residyvärde använder vi följande. Låt $h(z) = \frac{1}{(z-c)^r}k(z)$ där $c \in \mathbf{C}$, $r \in \mathbf{Z}_+$ och $k(z)$ är analytisk i en omgivning av punkten c. Att $k(z)$ är analytisk i en omgivning av punkten c medför att $k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}k^{(\nu)}(c)(z-c)^\nu$ i någon öppen cirkelskiva med medelpunkt i c, och således gäller i cirkelskivan att

$$h(z) = \frac{1}{(z-c)^r}k(z) = \frac{1}{(z-c)^r}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}k^{(\nu)}(c)(z-c)^\nu$$

$$= \frac{1}{(z-c)^r}\left(k(c) + \frac{1}{1!}k'(c)(z-c) + \ldots + \frac{1}{(r-1)!}k^{(r-1)}(c)(z-c)^{r-1} + \ldots \right)$$

$$= k(c)(z-c)^{-r} + + \frac{1}{1!}k'(c)(z-c)^{-r+1} + \ldots + \frac{1}{(r-1)!}k^{(r-1)}(c)(z-c)^{-1} + \ldots\ .$$

Det följer att

$$Res\left(\frac{1}{(z-c)^r}k(z), c \right) = \frac{1}{(r-1)!}k^{(r-1)}(c) \quad \text{för } r = 1,2,\ldots.$$

Med hjälp av detta får vi att

$$Res\,(h(z),i) = Res\left(\frac{1}{(z+i)^n(z-i)^n}, i \right) = \frac{1}{(n-1)!}D^{n-1}\frac{1}{(z+i)^n}\Big|_{z=i} =$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{\big(-n\big)\big(-(n+1)\big)\cdot\ldots\cdot\big(-(2n-2)\big)}{(z+i)^{2n-1}}\Big|_{z=i} =$$

$$(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{\big((n-1)!\big)^2}\frac{1}{(2i)^{2n-1}} = -\binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{2^{2n-1}}i,$$

vilket insatt i (15) ovan ger att

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt = \binom{2n-2}{n-1}\frac{\pi}{2^{2n-2}}.$$

Således har vi att

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx = \binom{2n-2}{n-1}\frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

4. Sätt $g(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+5x^2+5y^2+5z^2-12$. Låt A vara mängden $g(x,y,z)=0$. Mängden A är sluten eftersom funktionen $g(x,y,z)$ är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^3$.

Vi motiverar först att f har ett minsta värde i mängden A. Vi noterar att punkten $(-2,0,0)) \in A$ och att $f(-2,0,0)=4$. Låt B vara mängden $x^2+y^2+z^2 \leq 4$. Mängden B är sluten och begränsad. Följande gäller nu.

i) Mängden $A \cap B$ är kompakt. Motivering: Eftersom A och B båda är slutna och snitt av slutna mängder alltid är en sluten mängd så är $A\cap B$ sluten, och eftersom B är begränsad så är $A \cap B$ begränsad. Mängden $A\cap B$ är således både sluten och begränsad och därmed kompakt.

ii) Funktinen f är kontinuerlig i $A\cap B$. Det följer av att f är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^3$.

iii) Punkten $(-2,0,0) \in A\cap B$ och $f(-2,0,0)=4$. Det följer av definitionen av mängden B.

iv) Funktionen $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 > 4$ för alla $(x,y,z) \in A \cap \complement B$. Det följer av definitionen av mängden B.

Av i) och ii) framgår att f har ett minsta värde i $A\cap B$, av iii) framgår att detta minsta värde är ≤ 4, och av iv) framgår sedan att detta minsta värde av f i $A\cap B$ också är minsta värde till f i hela A. Funktionen f har således ett minsta värde i A. Det återstår att motivera att f saknar största värde i A. Vi har att $(x,y,z)\in A \iff x^3+y^3+z^3+5x^2+5y^2+5z^2 = 12$. Varje reell tredjegradsekvation har minst en reell rot. För varje reellt tal x finns det således minst ett reellt tal y sådant att $x^3+y^3+5x^2+5y^2 = 12$. Låt y_x vara ett sådant reellt tal. Då gäller att $(x, y_x, 0) \in A$ för godtyckligt reellt tal x och att

$$f(x,y_x,0) = x^2 + (y_x)^2 \geq x^2, \quad \text{som} \to \infty \text{ då } x\to\infty.$$

Funktionen f har alltså inget största värde i A.

Vi bestämmer nu minsta värdet av f i A, samt varje punkt där detta värde antas. Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller att varje punkt där minsta värdet av f i A antas finns med bland punkterna i 1), 2) och 3) nedan.

1) Punkter $(x,y,z)\in A$ sådana att $\nabla f(x,y,z)$ och $\nabla g(x,y,z)$ är linjärt beroende.
Derivering ger att $\nabla f(x,y,z) = 2(x,y,z)$ och att $\nabla g(x,y,z) = (3x^2+10x, 3y^2+10y, 3z^2+10z)$. Eftersom $(0,0,0)\notin A$ så är $\nabla f(x,y,z) \neq (0,0,0)$ för alla $(x,y,z)\in A$. För $(x,y,z)\in A$ gäller alltså att $\nabla f(x,y,z)$ och $\nabla g(x,y,z)$ är linjärt beroende om och endast om $\nabla g(x,y,z) = \lambda\nabla f(x,y,z)$ för något reellt tal λ. Men $\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla f(x,y,z) \iff$

$$\text{(16)} \qquad \begin{cases} x(3x+10-\lambda) = 0 \\ y(3y+10-\lambda) = 0 \\ z(3z+10-\lambda) = 0. \end{cases}$$

Vi får tre olika delfall här. (Kom ihåg att $x=y=z=0$ inte går, eftersom $(0,0,0)\neq A$.)

1a) En av x,y,z är skild från 0 och övriga två är 0. Vi behandlar delfallet $x\neq 0$ och $y=z=0$. Övriga två delfall här ger vart och ett samma funktionsvärden som detta delfall på grund av symmetri. Av $(x,y,z)\in A$ och $y=z=0$ får vi att $x^3+5x^2-12=0$, som har en lösning $x=-2$. Polynomdivision ger att $x^3+5x^2-12 = (x+2)(x^2-x-6)$. Ekvationen $x^2-x-6=0$ har lösningarna $x=-2$ och $x=3$. I det behandlade delfallet här får vi alltså punkterna $(-2,0,0)$ och $(3,0,0)$. Motsvarande funktionsvärden är $f(-2,0,0)=4$ och $f(3,0,0)=9$. Det minsta av dessa är $f(-2,0,0)=4$.

1b) Två av x, y, z är skilda från 0 och en är 0. Vi behandlar delfallet $x, y \neq 0$ och $z = 0$. Övriga två delfall här ger vart och ett samma funktionsvärden som detta delfall på grund av symmetri. De två första ekvationerna i (16) ger tillsammans med $x, y \neq 0$ att $3x+10-\lambda = 0$ och att $3y+10-\lambda = 0$, varav följer att $x = y$. Av $(x, y, z) \in A$ samt $x = y$ och $z = 0$ får vi att $x^3 + 5x^2 - 6 = 0$, som har en lösning $x = 1$. Polynomdivision ger att $x^3 + 5x^2 - 6 = (x - 1)(x^2 + 6x + 6)$. Ekvationen $x^2 + 6x + 6 = 0$ har lösningarna $x = -3 + \sqrt{3}$ och $x = -3 - \sqrt{3}$. I det behandlade delfallet här får vi alltså punkterna $(1, 1, 0)$, $(-3 + \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}, 0)$ och $(-3 - \sqrt{3}, -3 - \sqrt{3}, 0)$. Motsvarande funktionsvärden är $f(1, 1, 0) = 2$, $f(-3 + \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}, 0) = 2(3 - \sqrt{3})^2 > 2 \cdot 1^2 = 2$ och $f(-3 - \sqrt{3}, -3 - \sqrt{3}, 0) = 2(3 + \sqrt{3})^2 > 2 \cdot 4^2 = 32$. Det minsta av dessa är $f(1, 1, 0) = 2$.

1c) Alla x, y, z är skilda från 0. De tre ekvationerna i (16) ger tillsammans med $x, y, z \neq 0$ att $3x + 10 - \lambda = 0$, att $3y + 10 - \lambda = 0$ och att $3y + 10 - \lambda = 0$, varav följer att $x = y = z$. Av $(x, y, z) \in A$ samt $x = y = z$ får vi att $x^3 + 5x^2 - 4 = 0$, som har en lösning $x = -1$. Polynomdivision ger att $x^3 + 5x^2 - 6 = (x + 1)(x^2 + 4x - 4)$. Ekvationen $x^2 + 4x - 4 = 0$ har lösningarna $x = -2+2\sqrt{2}$ och $x = -2-2\sqrt{2}$. I det behandlade delfallet här får vi alltså punkterna $(-1, -1, -1)$, $(-2+2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2})$ och $(-2-2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2}, -2-2\sqrt{2})$. Motsvarande funktionsvärden är $f(-1, -1, -1) = 3$, $f(-2+2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}) = 3(2\sqrt{2}-2)^2 < 3 \cdot 1^2 = 3$ och $f(-2 - 2\sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2}, -2 - 2\sqrt{2}) = 3(2 + 2\sqrt{2})^2 > 3 \cdot 4^2 = 36$. Det minsta av dessa är $f(-2 + 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}) = 3(2\sqrt{2} - 2)^2$

2) Kantpunkter (relativa randpunkter) till ytan A.
Sådana punkter finns ej.

3) Punkter $(x, y, z) \in A$ sådana att någon av $\nabla f(x, y, z)$ och $\nabla g(x, y, z)$ ej existerar.
Sådana punkter finns ej.

Av 1), 2) och 3) framgår att minsta värdet av f i A är $\min\big(4, 2, 3(2\sqrt{2} - 2)^2\big)$. Eftersom

$$3(2\sqrt{2} - 2)^2 = 12(\sqrt{2} - 1)^2 = 12\frac{\big((\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\big)^2}{(\sqrt{2} + 1)^2} = 12\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} > 12\frac{1}{3 + 3} = 2$$

är följaktligen 2 minsta värdet av f i A. Minsta värdet av f i A antas i punkten $(1, 1, 0)$, och på grund av symmetri också i punkterna $(1, 0, 1)$ och $(0, 1, 1)$.

5. Derivering ger att

$$P_2'(x, y) = \frac{-x^{14} + 3x^{10}y^4 + 7x^6y^8}{(x^8 + x^4y^4 + y^8)^2} \quad \text{och} \quad Q_1'(x, y) = \frac{-x^{14} + 3x^{10}y^4 + 7x^6y^8}{(x^8 + x^4y^4 + y^8)^2} \quad \text{för alla } (x, y) \in D.$$

Således gäller att $P_2'(x, y) = Q_1'(x, y)$ för alla $(x, y) \in D$. Eftersom $P(x, y), Q(x, y) \in C^1(D)$ så följer av detta att kurvintegralen $\int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ är oberoende av vägen för kurvor γ i varje enkelt sammanhängande delmängd av $\mathbf{R}^2$. Mängdent D här är en öppen bågvis sammanhängande delmängd av $\mathbf{R}^2$, men D är inte enkelt sammanhängande. Trots att $P_2'(x, y) = Q_1'(x, y)$ för alla $(x, y) \in D$ kan det därför gälla att kurvintegralen $\int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ inte är oberoende av vägen för kurvor γ i D. Vi visar nu att så är fallet. Enligt ett resultat om kurvintegraler i en öppen bågvis sammanhängande delmängd av planet gäller att kurvintegralen $\int_\gamma P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy$ är oberoende av vägen för kurvor γ i D om och endast om $\int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ för varje enkel sluten kurva γ i D. Låt γ vara enhetscirkeln $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$. Denna kurva är en enkel sluten kurva i D och för denna kurva har vi att

$$\int_\gamma P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos^6 t \sin t}{\cos^8 t + \cos^4 t \sin^4 t + \sin^8 t}(-\sin t) + \frac{\cos^7 t}{\cos^8 t + \cos^4 t \sin^4 t + \sin^8 t} \cos t \right) dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos^6 t)(\sin^2 t + \cos^2 t)}{\cos^8 t + \cos^4 t \sin^4 t + \sin^8 t}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^6 t}{\cos^8 t + \cos^4 t \sin^4 t + \sin^8 t}\,dt > 0.$$

(Att slutintegralen ovan är > 0 följer av att integranden där är > 0 i $t \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$.) Kurvintegralen $\int_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ är följaktligen inte oberoende av vägen för kurvor γ i D.

Låt nu γ_0 vara kurvan $4x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, från punkten $(1, 0)$ till punkten $(-1, 0)$. Vi ska beräkna $\int_{\gamma_0} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$. För $T > 1$ låt γ_{1T} vara räta linjen från punkten $(1, 0)$ till punkten $(T, 0)$, låt γ_{2T} vara räta linjen från punkten $(T, 0)$ till punkten $(T, 1)$, låt γ_{3T} vara räta linjen från punkten $(-T, 1)$ till punkten $(T, 1)$, låt γ_{4T} vara räta linjen från punkten $(-T, 0)$ till punkten $(-T, 1)$ och låt γ_{5T} vara räta linjen från punkten $(-T, 0)$ till punkten $(-1, 0)$, samt sätt $\gamma_T = \gamma_{1T} \cup \gamma_{2T} \cup (-\gamma_{3T}) \cup (-\gamma_{4T}) \cup \gamma_{5T}$. Sätt $E = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) \,|\, y \leq 0\}$. Mängden E är då en enkelt sammanhängande delmängd av $\mathbf{R}^2$. Som konstaterats ovan är därför den givna kurvintegralen $\int_\gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ oberoende av vägen för kurvor γ i E. Kurvorna γ_0 och γ_T är två kurvor i E med samma start- och slutpunkt. Alltså är $\int_{\gamma_0} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_{\gamma_T} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$. Denna likhet tillsammans med definitionen av γ_T samt att $\int_{-\Gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = -\int_\Gamma P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$ ger att

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \\ \int_{\gamma_{1T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy + \int_{\gamma_{2T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy - \\ \int_{\gamma_{3T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy - \int_{\gamma_{4T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy + \\ \int_{\gamma_{5T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.\end{aligned}$$

Men på γ_{1T} och γ_{5T} gäller $y = 0$, vilket medför att $\int_{\gamma_{1T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$ och att $\int_{\gamma_{5T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$, Alltså har vi att

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \\ \int_{\gamma_{2T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy - \int_{\gamma_{3T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy - \\ \int_{\gamma_{4T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.\end{aligned} \tag{17}$$

Parametriseringen $x = T$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$ av γ_{2T}, parametriseringen $x = t$, $y = 1$, $-T \leq t \leq T$ av γ_{3T}, och parametriseringen $x = -T$, $y = t$, $0 \leq t \leq 1$ av γ_{4T} ger

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{2T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_0^1 \frac{T^7}{T^8 + T^4 t^4 + t^8}\, dt, \\ \int_{\gamma_{3T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = -\int_{-T}^{T} \frac{t6}{t^8 + t^4 + 1}\, dt, \quad \text{och} \\ \int_{\gamma_{4T}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = -\int_0^1 \frac{T^7}{T^8 + T^4 t^4 + t^8}\, dt.\end{aligned}$$

Detta insatt i (17) visar att

$$\int_{\gamma_0} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_{-T}^{T} \frac{t^6}{t^8 + t^4 + 1}\, dt + 2\int_0^1 \frac{T^7}{T^8 + T^4 t^4 + t^8}\, dt. \tag{18}$$

Här i (18) är T ett godtyckligt tal > 1. För godtyckligt $T > 1$ har vi vidare att

$$0 < \int_0^1 \frac{T^7}{T^8 + T^4 t^4 + t^8}\, dt < \int_0^1 \frac{T^7}{T^8}\, dt = \frac{1}{T}, \quad \text{som} \to 0 \text{ då } T \to \infty.$$

Låter vi $T \to \infty$ i (18) får vi således att

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^6}{t^8+t^4+1}\,dt \tag{19}$$

Vi beräknar nu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^6}{t^8+t^4+1}\,dt$$

med residykalkyl. Sätt $h(z) = \frac{z^6}{z^8+z^4+1}$. Ekvationen $z^8+z^4+1=0 \iff (z^4)^2+z^4+1=0$. Ekvationen $w^2+w+1=0$ är ekvivalent med att $w^3-1=0$ och $w \neq 1$ enligt summaformeln för en geometrisk serie och har alltså lösningarna $e^{2\pi i/3}$ och $e^{4\pi i/3}$. Lösningarna till ekvationen $z^8+z^4+1=0$ är således lösningarna till ekvationen $z^4 = e^{2\pi i/3}$ tillsammans med lösningarna till ekvationen $z^4 = e^{4\pi i/3}$. Nollställena till z^8+z^4+1 är alltså $e^{\pi i/6}e^{2k\pi i/4}$, $k=0,1,2,3$ och $e^{\pi i/3}e^{2k\pi i/4}$, $k=0,1,2,3$. Samtliga nollställen till z^8+z^4+1 har absolutbelopp 1 och ligger alltså innanför cirkeln $|z|=R$ för godtyckligt $R>1$. För $R>1$ låt Γ_{1R} vara räta linjen från $-R$ till R och låt Γ_{2R} vara halvcirkeln $|z|=R$, $Im\,z \geq 0$, från R till $-R$, samt sätt $\gamma_R = \Gamma_{1R} \cup \Gamma_{2R}$. För godtyckligt $R>1$ är då γ_R en enkel sluten positivt orienterad styckvis C^1-kurva sådan att nollställena $z_0 = e^{\pi i/6}$, $z_3 = e^{\pi i/6}e^{2\pi i/4} = e^{2\pi i/3} = -e^{\pi i/3}$, $z_2 = e^{\pi i/3}$ och $z_1 = e^{\pi i/3}e^{2\pi i/4} = e^{5\pi i/6} = -e^{-\pi i/6}$ till z^8+z^4+1 ligger innanför γ_R medan övriga fyra nollställen till z^8+z^4+1 ligger utanför γ_R. Enligt sats om analytiska funktioner gäller därför att

$$\int_{\gamma_R} h(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{3} Res\,(h(z), z_k) \quad \text{för alla } R>1,$$

vilket enligt definitionen av γ_R betyder att

$$\int_{\Gamma_{1R}} h(z)\,dz + \int_{\Gamma_{2R}} h(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{3} Res\,(h(z), z_k) \quad \text{för alla } R>1.$$

Parametriseringen $z=t$, $-R \leq t \leq R$, av Γ_{1R} ger att

$$\int_{\Gamma_{1R}} h(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{t^6}{t^8+t^4+1}\,dt.$$

Således gäller att

$$\int_{-R}^{R} \frac{t^6}{t^8+t^4+1}\,dt + \int_{\Gamma_{2R}} h(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{3} Res\,(h(z), z_k) \quad \text{för alla } R>1. \tag{20}$$

För att underlätta fortsatt beräkning använder vi att enligt summaformeln för en geometrisk serie gäller att

$$z^8+z^4+1 = \frac{z^{12}-1}{z^4-1} \quad \text{om } z^4 \neq 1.$$

Således har vi att

$$h(z) = \frac{z^6}{\frac{z^{12}-1}{z^4-1}} = \frac{z^6(z^4-1)}{z^{12}-1} = \frac{z^{10}-z^6}{z^{12}-1} \quad \text{om } z^4 \neq 1.$$

Dvs för $z^4 \neq 1$ så är $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ där $f(z) = z^{10}-z^6$ och $g(z) = z^{12}-1$. För varje $z \in \Gamma_{2R}$ där $R>1$ har vi $|z|=R$ där $R>1$ och därmed att

$$|h(z)| = \frac{|z^{10}-z^6|}{|z^{12}-1|} \leq \frac{|z|^{10}+|z|^6}{|z|^{12}-1} = \frac{R^{10}+R^6}{R^{12}-1}$$

och eftersom Γ_{2R} har längd πR så gäller för varje $R>1$ att

$$\left|\int_{\Gamma_{2R}} h(z)\,dz\right| \leq \frac{R^{10}+R^6}{R^{12}-1}\pi R, \quad \text{som} \to 0 \text{ då } R \to \infty.$$

Låter vi $R \to \infty$ i (20) får vi alltså att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^6}{t^8+t^4+1}\,dt = 2\pi i \sum_{k=0}^{3} Res\,(h(z), z_k)\,. \tag{21}$$

Det återstår att beräkna residysumman ovan. För z_k, $k = 0, 1, 2, 3$, har vi att $z_k^4 \neq 1$ samt att $f(z_k) = z_k^{10} - z_k^6 = z_k^6(z_k^4 - 1) \neq 0$, $g(z_k) = 0$ och att $g'(z_k) = 12z_k^{11} \neq 0$, och således har vi för $k = 0, 1, 2, 3$ det enklaste residyfallet i vilket $Res\,(h(z), z_k) = Res\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_k\right) = \frac{f(z_k}{g'(z_k)}$. Vi får att

$$Res\,(h(z), z_k) = Res\left(\frac{f(z)}{g(z)}, z_1\right) = \frac{f(z_k)}{g'(z_k)} = \frac{z_k^{10} - z_k^4}{12z_k^{11}} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{z_k} - \frac{z_k}{z_k^6}\right),$$

varav följer att

$$Res\,(h(z), z_0) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{z_0} - \frac{z_0}{z_0^6}\right) = \frac{1}{12}\left(e^{-\pi i/6} - \frac{e^{\pi i/6}}{-1}\right) = \frac{1}{12}\left(e^{\pi i/6} + e^{-\pi i/6}\right) = \frac{1}{6}\cos\frac{\pi}{6},$$

$$Res\,(h(z), z_1) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{z_1} - \frac{z_1}{z_1^6}\right) = \frac{1}{12}\left(-e^{\pi i/6} - \frac{-e^{-\pi i/6}}{-1}\right) = -\frac{1}{12}\left(e^{\pi i/6} + e^{-\pi i/6}\right) = -\frac{1}{6}\cos\frac{\pi}{6},$$

$$Res\,(h(z), z_2) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{z_2} - \frac{z_2}{z_2^6}\right) = \frac{1}{12}\left(e^{-\pi i/3} - \frac{e^{\pi i/3}}{1}\right) = -\frac{1}{12}\left(e^{\pi i/3} - e^{-\pi i/3}\right) = -\frac{1}{6}i\sin\frac{\pi}{3} \text{ och}$$

$$Res\,(h(z), z_3) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{z_3} - \frac{z_3}{z_3^6}\right) = \frac{1}{12}\left(-e^{\pi i/3} - \frac{-e^{-\pi i/3}}{1}\right) = -\frac{1}{12}\left(e^{\pi i/3} - e^{-\pi i/3}\right) = -\frac{1}{6}i\sin\frac{\pi}{3},$$

Följaktligen har vi att

$$\sum_{k=0}^{3} Res\,(h(z), z_k) = --\frac{1}{3}i\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}i,$$

vilket insatt i (21) ger att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^6}{t^8+t^4+1}\,dt = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

Likheten (19) ger sedan slutligen att

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.