MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys IV
140602

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Beräkna ytintegralen $\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS$ där Y är den del av ytan $(x-z)^2+(y-z)^2=1+z$ där $0\le z\le 1$, $\mathbf{N}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till Y samt $\mathbf{F}=(xz,yz,xy)$. 10 p

2. a) Bestäm alla komplexa tal z för vilka potensserien $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+1)z^n$ konvergerar. Bestäm även potensseriens summa för varje sådant komplext tal z. 5 p

   b) Låt den reella funktionen $f(x)$ vara definierad och avtagande i intervallet $x\ge 0$ samt sådan att $f(x)\to 0$ då $x\to\infty$. Sätt $a_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\sin x\,dx$ för varje heltal $n\ge 0$. Visa att $a_n=(-1)^n\int_0^{\pi} f(x+n\pi)\sin x\,dx$ för varje heltal $n\ge 0$. Visa att serien $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ är konvergent. Visa att den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} f(x)\sin x\,dx$ är konvergent. 5 p

3. Sätt $f(x,y,z)=x+y+z$, $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ och $h(x,y,z)=x^3+y^3+z^3$.

   a) Avgör om funktionen $h(x,y,z)$ har något största eller minsta värde då $f(x,y,z)=3$ och $g(x,y,z)=9$ samt bestäm i förekommande fall största/minsta värdet. Ange i förekommande fall också varje punkt där ett sådant värde antas. 5 p

   b) Avgör om funktionen $g(x,y,z)$ har något största eller minsta värde då $f(x,y,z)=3$ och $h(x,y,z)=15$ samt bestäm i förekommande fall största/minsta värdet. Ange i förekommande fall också varje punkt där ett sådant värde antas. 5 p

4. För alla $z\in\mathbf{C}$ för vilka $e^z-1\ne 0$ sätt $f(z)=\frac{z}{e^z-1}$, och sätt även $f(0)=1$. Motivera att funktionen $f(z)$ är analytisk i en omgivning av 0 i $\mathbf{C}$. Låt $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ vara potensserieutvecklingen av $f(z)$ i 0. För godtyckligt heltal $n\ge 1$ låt γ_n beteckna den positivt orienterade randkurvan till kvadraten i $\mathbf{C}$ med hörn i de fyra punkterna $\pm\big((2n+1)\pi+(2n+1)\pi i\big)$ och $\pm\big((2n+1)\pi-(2n+1)\pi i\big)$. Låt m vara ett godtyckligt heltal ≥ 1. Visa först att

$$\int_{\gamma_n}\frac{1}{z^{2m}(e^z-1)}\,dz=2\pi i\left(a_{2m}-\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m-1}\pi^{2m}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{2m}}\right)\quad\text{för } n=1,2,\dots,$$

   och visa sedan att

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}}=(-1)^{m-1}2^{2m-1}\pi^{2m}a_{2m}$$

   genom att visa att

$$\int_{\gamma_n}\frac{1}{z^{2m}(e^z-1)}\,dz\to 0\ \text{ då } n\to\infty.$$

   Ange också summan för serien $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ genom att beräkna potensseriekoefficienten a_2. 10 p

5. Sätt $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid (x,y)\ne(0,0)\}$. Betrakta kurvintegralen

$$\int_{\gamma}-\frac{xy^{10}}{x^{12}+y^{12}}\,dx+\frac{x^2y^9}{x^{12}+y^{12}}\,dy.$$

   Kurvintegralen är definierad för kurvor γ i området D. Visa att kurvintegralen är oberoende av vägen för kurvor γ i D. Beräkna också kurvintegralens värde då γ är någon kurva i D från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$. 10 p

Var god vänd.

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. Formulera och bevisa divergenssatsen för områden i rummet med *en* under- och *en* översida, *en* vänster- och *en* högersida och *en* bak- och *en* framsida. Skissera sedan hur divergenssatsen kan fås för mera allmänna områden i rummet. 10 p

7. (Cauchys rotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är sådan att

$$|a_k|^{1/k} \to A \text{ då } k \to \infty, \text{ där } 0 \leq A \leq \infty.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$, och divergent om $1 < A \leq \infty$. 10 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning on 11/6 kl 13.00-13.15 utanför sal 15 hus 5, därefter i rum 204 hus 6.