Lösningar till Matematisk analys IV, 140602

1. Vi använder divergenssatsen för att beräkna den givna ytintegralen. Eftersom Y inte är en sluten yta måste vi då först på lämpligt sätt komplettera Y till en sluten yta. Låt Y_1 vara den del av planet $z = 0$ där $x^2 + y^2 \leq 1$, och låt Y_2 vara den del av planet $z = 1$ där $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$. Ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ är då en sluten yta. Låt D vara den mängd som ytan $Y \cup Y_1 \cup Y_2$ omsluter. Låt vidare $\mathbf{N}_1$ vara den utåtriktade enhetsnormalen till Y_1 och $\mathbf{N}_2$ den utåtriktade enhetsnormalen till Y_2, där utåtriktad är i förhållande till mängden D. Enligt divergenssatsen gäller då att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\, dxdydz. \tag{1}$$

En parametrisering av ytan Y_1 är $x = u$, $y = v$, $z = 0$, där $u^2 + v^2 \leq 1$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, 1\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,0,1),$$

så ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_1 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_1\, dS = \iint_{Y_1} (xz, yz, xy) \cdot \mathbf{N}_1\, dS \tag{2}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_1.)

$$= -\iint_{u^2+v^2 \leq 1} (0,0,uv) \cdot (0,0,1)\ dudv = -\iint_{u^2+v^2 \leq 1} uv\, dudv = 0$$

Sista integralen ovan är noll t.ex. eftersom uv är udda i u och området $u^2 + v^2 \leq 1$ är symmetriskt kring $u = 0$.

En parametrisering av ytan Y_2 är $x = u$, $y = v$, $z = 1$, där $(u-1)^2 + (v-1)^2 \leq 2$. Med $\mathbf{r}(u,v) = \big(u, v, 1\big)$ har vi att

$$\mathbf{r}_1'(u,v) = (1,0,0), \quad \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,1,0) \quad \text{och} \quad \mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v) = (0,0,1),$$

så ytnormalen $\mathbf{r}_1'(u,v) \times \mathbf{r}_2'(u,v)$ till Y_2 pekar uppåt i den införda parametriseringen. Vi får att

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_2\, dS = \iint_{Y_2} (xz, yz, xy) \cdot \mathbf{N}_2\, dS \tag{3}$$

(Enligt den införda parametriseringen av Y_2.)

$$= +\iint_{(u-1)^2+(v-1)^2 \leq 2} (u, v, uv) \cdot (0,0,1)\ dudv = \iint_{(u-1)^2+(v-1)^2 \leq 2} uv\, dudv$$

(Gör substitutionen $s = u - 1$, $t = v - 1 \iff u = s + 1$, $v = t + 1$, substitutionens funktionaldeterminant $\frac{d(u,v)}{d(s,t)} = 1$, och $(u-1)^2 + (v-1)^2 \leq 2$ övergår i $s^2 + t^2 \leq 2$.)

$$= \iint_{s^2+t^2 \leq 2} (s+1)(t+1)|1|\, dsdt = \iint_{s^2+t^2 \leq 2} (st + s + t + 1)\ dsdt$$

(Eftersom $st + s$ är udda i s och området $s^2 + t^2 \leq 2$ är symmetriskt kring $s = 0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 2} (t+1)\; dsdt$$

(Eftersom t är udda i t och området $s^2+t^2 \le 2$ är symmetriskt kring $t=0$.)

$$= \iint_{s^2+t^2\le 2} dsdt = \text{area}(s^2+t^2\le 2) = \pi(\sqrt{2})^2 = 2\pi.$$

Vidare är $\nabla\cdot\mathbf{F} = z+z+0 = 2z$ och D är mängden $(x-z)^2+(y-z)^2 \le 1+z$, $0\le z\le 1$, och vi får att

$$\text{(4)} \qquad \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dxdydz = \iiint_D 2z\, dxdydz$$

$$= \int_0^1 \left(\iint_{(x-z)^2+(y-z)^2\le 1+z} 2z\, dxdy \right) dz.$$

För dubbelintegralen ovan har vi att

$$\text{(5)} \qquad \iint_{(x-z)^2+(y-z)^2\le 1+z} 2z\, dxdy = 2z \iint_{(x-z)^2+(y-z)^2\le 1+z} dxdy$$

$$= 2z\,\text{area}\big((x-z)^2+(y-z)^2\le 1+z\big) = 2z\,\pi(\sqrt{1+z})^2 = 2\pi(z+z^2).$$

Insättning av (5) i (4) ger att

$$\text{(6)} \qquad \iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}\, dxdydz = 2\pi\int_0^1 \big(z+z^2\big)\; dz = 2\pi\left[\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3\right]_0^1 = \frac{5\pi}{3}.$$

Av (1), (2) och (3) och (6) får vi att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\, dS = \frac{5\pi}{3} - 0 - 2\pi = -\frac{\pi}{3}.$$

2. Sätt $a_n = \big(n^2+1\big)\, z^n$. För $z\neq 0$ har vi att

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\big((n+1)^2+1\big)\,|z|^{n+1}}{(n^2+1)\,|z|^n} = \frac{(n^2+2n+2)}{n^2+1}\,|z| = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}\,|z|, \quad \text{som} \to |z| \text{ då } n\to\infty,$$

och enligt d'Alemberts kvotkriterium gäller således för $z\neq 0$ att givna potensserien är absolutkonvergent och därmed konvergent om $|z|<1$ samt att potensserien är divergent om $|z|>1$. Potensserien är självklart konvergent om $z=0$. Vidare har vi att

$$|z|=1 \quad\Longrightarrow\quad |a_n| = n^2+1 \quad\Longrightarrow\quad a_n \not\to 0 \quad \text{då} \quad n\to\infty \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{är divergent.}$$

Givna potensserien är således konvergent precis om $|z|<1$. Vi bestämmer nu potensseriens summa för dessa komplexa tal. Summan kan fås genom att starta med likheten (summaformeln för en oändlig geometrisk serie)

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1.$$

Subtraktion av 1 från båda led medför att

$$\text{(7)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} - 1, \quad |z|<1.$$

En potensserie med positiv konvergensradie är deriverbar med termvis derivering i det inre av den cirkelskiva i det komplexa talplanet där potensserien konvergerar, enligt sats om potensserier. Derivering av (7) ger således att

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1,$$

som efter multiplikation av båda led med z ger att

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1. \tag{8}$$

Derivering av (8) ger vidare att

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1} = \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{1}{(1-z)^2}, \quad |z| < 1,$$

som efter multiplikation av båda led med z ger att

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n &= \frac{2z}{(1-z)^3} - \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{2}{(1-z)^2} - \left(\frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{1-z}\right) \\ &= \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.\end{aligned} \tag{9}$$

Av (7) och (9) får vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2+1\right) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{2}{(1-z)^3} - \frac{3}{(1-z)^2} + \frac{2}{1-z} - 1 = \frac{2z - z^2 + z^3}{(1-z)^3}, \quad |z| < 1.$$

b) För godtyckligt heltal $n \geq 0$ har vi att

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x) \sin x \, dx = \int_0^{\pi} f(u + n\pi) \sin(u + n\pi) \, du \\ &= (-1)^n \int_0^{\pi} f(u + n\pi) \sin u \, du = (-1)^n \int_0^{\pi} f(x + n\pi) \sin x \, dx, \end{aligned}$$

som vi får genom att först göra variabelsubstitutionen $x = u + n\pi$ och sedan använda trigonometriformeln $\sin(u + n\pi) = \sin u \cos n\pi + \cos u \sin n\pi = (\sin u)(-1)^n + (\cos u) \cdot 0 = (-1)^n \sin u$. Sätt $b_n = \int_0^{\pi} f(x + n\pi) \sin x \, dx$. För funktionen $f(x)$ gäller: (i) $f(x)$ är avtagande i $x \geq 0$, (ii) $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$ samt (iii) $f(x) \geq 0$ i $x \geq 0$. Att (i) och (ii) gäller är givet, och att (iii) gäller är en följd av (i) och (ii). För godtyckligt heltal $n \geq 0$ följer av (i) att

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= \int_0^{\pi} f(x + n\pi) \sin x \, dx - \int_0^{\pi} f\left(x + (n+1)\pi\right) \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \left(f(x + n\pi) - f\left(x + (n+1)\pi\right)\right) \sin x \, dx \geq \int_0^{\pi} 0 \cdot \sin x \, dx = 0 \end{aligned}$$

För godtyckligt heltal $n \geq 0$ följer av (iii), (i) och (ii) att

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(iii)}{\leq} \int_0^{\pi} f(x + n\pi) \sin x \, dx \overset{(i)}{\leq} \int_0^{\pi} f(n\pi) \sin x \, dx = f(n\pi) \int_0^{\pi} \sin x \, dx \\ &= 2f(n\pi) \ \text{ som } \overset{(ii)}{\to} 0 \text{ då } n \to \infty, \quad \text{så } b_n = \textstyle\int_0^{\pi} f(x + n\pi) \sin x \, dx \to 0 \text{ då } n \to \infty. \end{aligned}$$

Talföljden $b_0, b_1, \ldots$ är således avtagande och $b_n \to 0$ då $n \to \infty$. Serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ är alltså konvergent enligt Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier. Låt s vara summan av denna konvergenta serie. Enligt definition av konvergent serie gäller då att $\sum_{n=0}^{N} a_n \to s$ då $N \to \infty$. Vi visar nu att den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x) \sin x \, dx$ är konvergent. Integralen är generaliserad enbart genom att övre integrationsgränsen är ∞. För godtyckligt reellt tal $T > \pi$ låt N_T vara det entydigt bestämda heltal ≥ 0 som uppfyller olikheten $T - \pi < (N_T + 1)\pi \leq T$. För godtyckligt reellt tal $T > \pi$ har vi då att

$$\int_0^T f(x) \sin x \, dx = \int_0^{(N_T+1)\pi} f(x) \sin x \, dx + \int_{(N_T+1)\pi}^T f(x) \sin x \, dx \tag{10}$$

$$= \sum_{n=0}^{N_T} a_n + \int_{(N_T+1)\pi}^T f(x) \sin x \, dx.$$

Definitionen av N_T och definitionen av s ger att

$$T \to \infty \quad \Longrightarrow \quad N_T \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{N_T} a_n \to s. \tag{11}$$

Triangelolikheten för integraler tillsammans med definitionen av N_T samt (iii), (i) och (ii) ger vidare att

$$\left| \int_{(N_T+1)\pi}^T f(x) \sin x \, dx \right| \leq \int_{(N_T+1)\pi}^T |f(x) \sin x| \, dx \tag{12}$$

$$\leq \int_{(N_T+1)\pi}^T |f(x)| \, dx \leq \int_{T-\pi}^T |f(x)| \, dx \overset{(iii)}{=} \int_{T-\pi}^T f(x) \, dx$$

$$\overset{(i)}{\leq} \int_{T-\pi}^T f(T-\pi) \, dx = \pi f(T-\pi) \quad \text{som} \overset{(ii)}{\to} 0 \text{ då } T \to \infty.$$

Av (10), (11) och (12) följer att

$$\int_0^T f(x) \sin x \, dx \to s \text{ då } T \to \infty.$$

Den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(x) \sin x \, dx$ är alltså konvergent (med värdet s).

3. I uppgiften är $f(x,y,z) = x + y + z$, $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ och $h(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$.

   a) Låt A vara mängden där $f(x,y,z) = 3$ och $g(x,y,z) = 9$. Mängden A är skärningen mellan klotytan $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ och planet $x + y + z = 3$ som skär genom klotytan. (Att planet verkligen skär genom klotytan och inte ligger utanför klotytan följer t.ex. av att punkten $(1,1,1)$ ligger på planet men innanför klotytan.) Mängden A är alltså en cirkel och således både sluten och begränsad och därmed kompakt. Funktionen $h(x,y,z)$ är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^3$ och speciellt i A. Att mängden A är kompakt och att $h(x,y,z)$ är kontinuerlig i A medför att $h(x,y,z)$ har ett största och ett minsta värde i A. Mängden A saknar ändpunkter och gradienterna $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ existerar överallt. Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller därför att varje punkt $(x,y,z) \in A$ där funktionen $h(x,y,z)$ antar sitt största eller minsta värdet i A finns med bland de punkter $(x,y,z) \in A$ där $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ är linjärt beroende. Vi har att $\nabla f(x,y,z) = (1,1,1)$, $\nabla g(x,y,z) = 2(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z) = 3(x^2,y^2,z^2)$. Gradienterna $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ är alltså linjärt beroende om och endast om vektorerna $(1,1,1)$, (x,y,z) och (x^2,y^2,z^2) är linjärt beroende. Tre vektorer i $\mathbf{R}^3$ är linjärt beroende om och endast om deras determinant är noll. Med hjälp av räkneregler för determinanter får vi att

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y(y-x) & z(z-x) \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & y & z \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y).$$

Vid den andra likheten ovan subtraherar vi först rad två multiplicerad med x från rad tre och därefter rad ett multiplicerad med x från rad två. Determinantberäkningen visar att begynnelsedeterminanten ovan är noll om och endast om två av variablerna x, y och z är lika. Vi har alltså att $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ är linjärt beroende om och endast om två av variablerna x, y och z är lika. De punkter $(x,y,z) \in A$ där $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ är linjärt beroende är alltså de punkter $(x,y,z) \in A$ där två av variablerna x, y och z är lika. Vi behandlar delfallet $z = x$. Övriga två delfall (delfallet $z = y$ och delfallet $y = x$) ger vart och ett samma funktionsvärden som detta delfall på grund av symmetri. Av $(x,y,z) \in A$ och $z = x$ får vi att $2x + y = 3$ och $2x^2 + y^2 = 9$, eller ekvivalent $y = 3 - 2x$ och $2x^2 + (3-2x)^2 = 9$. Men $2x^2 + (3-2x)^2 = 9 \iff x^2 - 2x = 0$, som har lösningarna $x = 0$ 0ch $x = 2$. Av $x = 0$ får vi $y = 3 - 2x = 3$ och $z = x = 0$, och av $x = 2$ får vi $y = 3 - 2x = -1$ och $z = x = 2$. I det behandlade delfallet får vi alltså punkterna $(0,3,0)$ och $(2,-1,2)$. Motsvarande funktionsvärden är $h(0,3,0) = 27$ och $h(2,-1,2) = 15$. Följande gäller således. Största värdet av h i A är 27 och antas i punkten $(0,3,0)$ och på grund av symmetri också i punkterna $(3,0,0)$ och $(0,0,3)$. Minsta värdet av h i A är 15 och antas i punkten $(2,-1,2)$ och på grund av symmetri också i punkterna $(-1,2,2)$ och $(2,2,-1)$.

b) Låt B vara mängden där $f(x,y,z) = 3$ och $h(x,y,z) = 15$. Mängden B är snittet av mängden $f(x,y,z) = 3$ och mängden $h(x,y,z) = 15$, vilka båda är slutna eftersom $f(x,y,z)$ och $h(x,y,z)$ båda är kontinuerliga i hela $\mathbf{R}^3$. Snitt av slutna mängder är alltid en sluten mängd. Mängden B är således sluten.

Vi motiverar först att g har ett minsta värde i mängden B. Vi noterar att punkten $(2,-1,2)) \in B$ och att $g(2,-1,2) = 9$. $\big($Enligt a) gäller ju $f(2,-1,2) = 3$, $g(2,-1,2) = 9$ och $h(2,-1,2) = 15$.$\big)$ Låt C vara mängden $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. Mängden C är sluten och begränsad. Följande gäller nu.

i) Mängden $B \cap C$ är kompakt. Motivering: Eftersom B och C båda är slutna och snitt av slutna mängder alltid är en sluten mängd så är $B \cap C$ sluten, och eftersom C är begränsad så är $B \cap C$ begränsad. Mängden $B \cap C$ är således både sluten och begränsad och därmed kompakt.

ii) Funktinen g är kontinuerlig i $B \cap C$. Det följer av att g är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^3$.

iii) Punkten $(2,-1,2) \in B \cap C$ och $g(2,-1,2) = 9$. Det följer av definitionen av mängden C.

iv) Funktionen $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 > 9$ för alla $(x,y,z) \in B \cap \complement C$. Det följer av definitionen av mängden C.

Av i) och ii) framgår att g har ett minsta värde i $B \cap C$, av iii) framgår att detta minsta värde är ≤ 9, och av iv) framgår sedan att detta minsta värde av g i $B \cap C$ också är minsta värde till g i hela B. Funktionen g har således ett minsta värde i B.

Vi motiverar nu att g saknar största värde i B. Vi har att $(x,y,z) \in B \iff x + y + z = 3$ och $x^3 + y^3 + z^3 = 15 \iff z = -(x + y - 3)$ och $(x + y - 3)^3 - x^3 - y^3 + 15 = 0$. Notera nu att $y = 3$ medför att $(x + y - 3)^3 - x^3 - y^3 + 15 = x^3 - x^3 - 27 + 15 = -12 < 0$ och att $y = 4$ medför att $(x + y - 3)^3 - x^3 - y^3 + 15 = (x + 1)^3 - x^3 - 64 + 15 = 3x^2 + 3x - 48 > 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - 48 = 12 > 0$ om $x > 4$. För varje $x > 4$ finns det alltså enligt satsen om mellanliggande värden ett tal y i intervaller $]3,4[$ sådant att $(x+y-3)^3 - x^3 - y^3 + 15 = 0$. Låt $y_x \in]3,4[$ vara ett sådant tal y och sätt $z_x = -(x + y_x - 3)$. Då gäller att $(x, y_x, z_x) \in B$ för godtyckligt $x > 4$ och att

$$g(x, y_x, z_x) = x^2 + (y_x)^2 + (z_x)^2 \geq x^2, \quad \text{som} \to \infty \text{ då } x \to \infty.$$

Funktionen g har alltså inget största värde i B. Mängden B saknar ändpunkter och gradienterna $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ existerar överallt. Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller därför att varje punkt $(x,y,z) \in B$ där funktionen $g(x,y,z)$ antar minsta värdet i B finns med bland de punkter $(x,y,z) \in B$ där $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ är linjärt beroende. Enligt del a) har vi att $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ är linjärt beroende om och endast om två av variablerna x, y och z är lika. De punkter $(x,y,z) \in B$ där $\nabla f(x,y,z)$, $\nabla g(x,y,z)$ och $\nabla h(x,y,z)$ är linjärt beroende är alltså de punkter $(x,y,z) \in B$ där två av variablerna x, y och z är lika. Vi behandlar delfallet $z = x$. Övriga två delfall (delfallet $z = y$ och delfallet $y = x$) ger vart och ett samma funktionsvärden som detta delfall på grund av symmetri. Av $(x, y, z) \in B$ och $z = x$ får vi att $2x + y = 3$ och $2x^3 + y^3 = 15$, eller ekvivalent $y = 3 - 2x$ och $2x^3 + (3 - 2x)^3 = 15$. Ekvationen $2x^3 + (3 - 2x)^3 = 9$ ger efter förenkling att $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$, som har en lösning $x = 2$ (ty $h(2, -1, 2) = 15$ enligt del a)). Polynomdivision ger att $x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = (x - 2)(x^2 - 4x + 1)$. Ekvationen $x^2 - 4x + 1 = 0$ har lösningarna $x = 2 \pm \sqrt{3}$. Av $x = 2$ får vi $y = 3 - 2x = -1$ och $z = x = 2$, av $x = 2 + \sqrt{3}$ får vi $y = 3 - 2x = -1 - 2\sqrt{3}$ och $z = x = 2 + \sqrt{3}$, och av $x = 2 - \sqrt{3}$ får vi $y = 3 - 2x = -1 + 2\sqrt{3}$ och $z = x = 2 - \sqrt{3}$. Vi får alltså punkterna $(2, -1, 2)$, $(2 + \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$ och $(2 - \sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$. För motsvarande funktionsvärden har vi att $g(2, -1, 2) = 9$, att $g(2 + \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) > 3^2 + 4^2 + 3^2 = 34$ och att

$$g(2 - \sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}) < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 < 7.$$

Det minsta av dessa tre funktionsvärden är alltså

$$g(2 - \sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})^2 + (-1 + 2\sqrt{3})^2 + (2 - \sqrt{3})^2 = 27 - 12\sqrt{3}.$$

Minsta värdet av g i B är alltså $27 - 12\sqrt{3}$ och antas i punkten $(2 - \sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ och på grund av symmetri också i punkterna $(-1 + 2\sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3})$ och $(2 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}, -1 + 2\sqrt{3})$.

4. För alla $z \in \mathbf{C}$ har vi att

$$e^z - 1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k\right) - 1 = \left(1 + \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots\right) - 1 = \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 + \dots$$

$$= z\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} z + \dots\right) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k = z g(z) \quad \text{där} \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k.$$

För funktionen $g(z)$ här konstaterar vi följande. Att $g(z)$ är lika med en potensserie som konvergerar för alla $z \in \mathbf{C}$ medför att $g(z)$ är analytisk i hela $\mathbf{C}$, och att $g(0) = 1 \neq 0$ medför att $g(z) \neq 0$ i $|z[< a$ för något $a > 0$. Definitionerna av $f(z)$ och $g(z)$ tillsammans med att $g(z) \neq 0$ i $|z[< a$ ger att

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{z g(z)} = \frac{1}{g(z)} \quad \text{i} \quad 0 < |z| < a.$$

Enligt definitionerna av $f(z)$ och $g(z)$ gäller också att $f(0) = 1$ och $g(0) = 1$. Vi har alltså att $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ i $|z| < a$. Eftersom $g(z)$ är analytisk och skild från noll i $|z| < a$ är följaktligen $f(z)$ analytisk i $|z| < a$ och har en potensserieutveckling $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ kring 0 som gäller i $|z[< a$.

Det behövs inte här, men detta går att precisera lite. Som bekant gäller att $e^z - 1 = 0$ precis om $z = 2\pi k i$ för något heltal k. Eftersom $g(0) = 1 \neq 0$ och $e^z - 1 = z g(z)$ för alla $z \in \mathbf{C}$ gäller följaktligen att $g(z) = 0$ precis om $z = 2\pi k i$ för något heltal $k \neq 0$. Det går alltså att välja $a = 2\pi$ i resonemanget ovan. Dvs $f(z)$ är analytisk i $|z| < 2\pi$ och potensserieutvecklingen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ av $f(z)$ kring 0 gäller i $|z| < 2\pi$.

Vi övergår nu till att studera kurvintegralen

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{z^{2m}(e^z - 1)} \, dz \quad \text{för } n = 1, 2, \dots .$$

Låt n vara ett godtyckligt heltal ≥ 1. Kurvan γ_n är en enkel sluten kurva som är positivt orienterad i förhållande till sitt inre. Integrandnämnaren $z^{2m}(e^z - 1)$ har nollställena $z_k = 2\pi k i$ där $k \in \mathbf{Z}$. Av dessa nollställen ligger nollställena z_k för $k = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ innanför γ_n och övriga nollställen ligger utanför γ_n. Enligt sats om komplexa kurvintegraler gäller därför att

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{z^{2m}(e^z - 1)} \, dz = 2\pi i \sum_{k=-n}^{k=n} Res\left(\frac{1}{z^{2m}(e^z - 1)}, z_k\right) \tag{13}$$

Vi beräknar nu residyvärdena i (13).

Låt först k vara något av heltalen $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$. Integranden

$$\frac{1}{z^{2m}(e^z-1)} = \frac{u(z)}{v(z)} \quad \text{där} \quad u(z) = \frac{1}{z^{2m}} \quad \text{och} \quad v(z) = e^z - 1.$$

Funktionerna $u(z)$ och $v(z)$ är analytiska i en omgivning av $z_k = 2\pi k i$. Funktionen $v(z) = e^z - 1$ har $v(z_k) = e^{z_k} - 1 = e^{2\pi k i} - 1 = 0$, och derivatan $v'(z) = e^z$ har $v'(z_k) = e^{z_k} = e^{2\pi k i} = 1 \neq 0$. Enligt sats om residyer gäller därför att

$$Res\left(\frac{1}{z^{2m}(e^z-1)}, z_k\right) = Res\left(\frac{u(z)}{v(z)}, z_k\right) = \frac{u(z_k)}{v'(z_k)}.$$

Vi får således att

$$\text{(14)} \qquad Res\left(\frac{1}{z^{2m}(e^z-1)}, z_k\right) = \frac{u(z_k)}{v'(z_k)} = \frac{\frac{1}{(z_k)^{2m}}}{1} = \frac{1}{(z_k)^{2m}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi k i)^{2m}} = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \frac{1}{k^{2m}} \quad \text{för} \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n.$$

Det återstår att beräkna residyvärdet i $z_0 = 0$. Låt talet a vara som i inledningen ($a = 2\pi$ går bra som vi noterat). Enligt definitionen av $f(z)$ gäller att integranden

$$\frac{1}{z^{2m}(e^z-1)} = \frac{1}{z^{2m+1}} \frac{z}{e^z-1} = \frac{1}{z^{2m+1}} f(z) \quad \text{i} \quad 0 < |z| < a,$$

och funktionen $f(z)$ är analytisk i $|z| < a$. Med potensserieutvecklingen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ av $f(z)$ kring 0 som gäller i $|z| < a$ får vi att

$$\frac{1}{z^{2m}(e^z-1)} = \frac{1}{z^{2m+1}} f(z) = \frac{1}{z^{2m+1}} \left(a_0 + a_1 z + \ldots + a_{2m} z^{2m} + z^{2m+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2m+1} z^k\right)$$

$$= a_0 z^{-2m-1} + a_1 z^{-2m} + \ldots + a_{2m} z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2m+1} z^k \quad \text{i} \quad 0 < |z| < a.$$

Men residyn för integranden i $z_0 = 0$ är definitionsmässigt koefficienten framför termen z^{-1} i utvecklingen av integranden kring 0, och följaktligen har vi att

$$\text{(15)} \qquad Res\left(\frac{1}{z^{2m}(e^z-1)}, z_0\right) = a_{2m}.$$

Insättning av (14) och (15) i (13) ger att

$$\int_{\gamma_n} \frac{1}{z^{2m}(e^z-1)} \, dz = 2\pi i \left(\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{k^{2m}} + a_{2m} + \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2m}}\right),$$

och eftersom

$$\sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{k^{2m}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2m}}$$

får vi att

$$\text{(16)} \qquad \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^{2m}(e^z-1)} \, dz = 2\pi i \left(a_{2m} - \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m-1}\pi^{2m}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{2m}}\right).$$

Vi visar nu att kurvintegralen i (16) går mot noll då $n \to \infty$. Vi har att $z \in \gamma_n$ om och endast om $z = (2n+1)\pi + ti$, $z = t + (2n+1)\pi i$, $z = -(2n+1)\pi + ti$ eller $z = t - (2n+1)\pi i$ för något $t \in [-(2n+1)\pi, (2n+1)\pi]$. För $z = (2n+1)\pi + ti$ och $t \in [-(2n+1)\pi, (2n+1)\pi]$ samt godtyckligt heltal $n \geq 1$ har vi att

$$|(e^z - 1)| = |e^{(2n+1)\pi} e^{ti} - 1| \geq |e^{(2n+1)\pi} e^{ti}| - 1 = e^{(2n+1)\pi} - 1 \geq e^{3\pi} - 1 > 2 - 1 = 1.$$

För $z = t + (2n+1)\pi i$ och $t \in [-(2n+1)\pi, (2n+1)\pi]$ samt godtyckligt heltal $n \geq 1$ har vi att

$$|(e^z - 1)| = |e^t e^{(2n+1)\pi i} - 1| = | - e^t - 1| = e^t + 1 > 1.$$

För $z = -(2n+1)\pi + ti$ och $t \in [-(2n+1)\pi, (2n+1)\pi]$ samt godtyckligt heltal $n \geq 1$ har vi att

$$|(e^z - 1)| = |e^{-(2n+1)\pi} e^{ti} - 1| \geq 1 - |e^{-(2n+1)\pi} e^{ti}| = 1 - e^{-(2n+1)\pi} \geq 1 - e^{-3\pi} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

För $z = t - (2n+1)\pi i$ och $t \in [-(2n+1)\pi, (2n+1)\pi]$ samt godtyckligt heltal $n \geq 1$ har vi att

$$|(e^z - 1)| = |e^t e^{-(2n+1)\pi i} - 1| = | - e^t - 1| = e^t + 1 > 1.$$

För godtyckligt $z \in \gamma_n$ och godtyckligt heltal $n \geq 1$ har vi alltså att $|e^z - 1| \geq \frac{1}{2}$. För godtyckligt $z \in \gamma_n$ gäller vidare antingen att $Re\, z = \pm(2n+1)\pi$ eller att $Im\, z = \pm(2n+1)\pi$, så för godtyckligt $z \in \gamma_n$ har vi att $|z| \geq (2n+1)\pi$. Olikheterna här visar att

(17) $$\left| \frac{1}{z^{2m}(e^z - 1)} \right| = \frac{1}{|z|^{2m}|e^z - 1|} \leq \frac{1}{((2n+1)\pi)^{2m} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi^{2m}} \frac{1}{(2n+1)^{2m}} \quad \text{för } z \in \gamma_n \text{ och } n \in \mathbf{Z}_+ \ .$$

Längden av γ_n

(18) $$L(\gamma_n) = 4 \cdot 2(2n+1)\pi = 8\pi(2n+1).$$

Av sats om uppskattning av en komplex kurvintegral samt (17) och (18) får vi att

$$\left| \int_{\gamma_n} \frac{1}{z^{2m}(e^z - 1)}\, dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_n} \left| \frac{1}{z^{2m}(e^z - 1)} \right| \cdot L(\gamma_n) \leq \frac{2}{\pi^{2m}} \frac{1}{(2n+1)^{2m}} \cdot 8\pi(2n+1)$$

$$= \frac{16}{\pi^{2m-1}} \frac{1}{(2n+1)^{2m-1}}, \quad \text{som} \to 0 \text{ då } n \to \infty.$$

Vi har därmed visat att kurvintegralen i (16) går mot noll då $n \to \infty$. Låter vi $n \to \infty$ i (16) får vi således att

$$0 = 2\pi i \left(a_{2m} - \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m-1}\pi^{2m}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \right),$$

och alltså att

(19) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} = (-1)^{m-1} 2^{2m-1} \pi^{2m} a_{2m}.$$

Vi beräknar nu slutligen summan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ genom att beräkna potensseriekoefficienten a_2 och använda formel (19) för $m = 1$. Enligt summaformeln för en oändlig geometrisk serie har vi att

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k w^k = 1 - w + w^2 - w^3 + \dots \quad \text{om } |w| < 1.$$

För $|z|$ tillräckligt litet får vi med hjälp av denna formel att

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!} z^k} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \dots\right)}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \dots\right) + \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \dots\right)^2 - \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{6}z^2 + \dots\right)^3 + \dots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}z + \left(-\frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)z^2 + \dots = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{12}z^2 + \dots\ ,$$

så $a_2 = \frac{1}{12}$. Med formel (19) för $m = 1$ ger det att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2\pi^2 a_2 = 2\pi^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Sätt

$$P(x,y) = -\frac{xy^{10}}{x^{12}+y^{12}} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{x^2y^9}{x^{12}+y^{12}}$$

då $(x,y) \in D$. En enkel räkning visar att

$$P_2'(x,y) = Q_1'(x,y) \left(= \frac{2xy^{21} - 10x^{13}y^9}{(x^{12}+y^{12})}\right) \quad \text{i } D. \tag{20}$$

Området D är en öppen bågvis sammanhängande delmängd av planet, men inte en öppen enkelt sammanhängande delmängd av planet. Trots att (20) gäller behöver därför inte givna kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ vara oberoende av vägen för kurvor γ i D. Enligt resultat om kurvintegraler i en öppen bågvis sammanhängande delmängd av planet gäller dock att givna kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ är oberoende av vägen för kurvor γ i D om och endast om

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \text{ för varje enkel sluten kurva } \gamma \text{ i } D. \tag{21}$$

Använder vi också att $\int_{-\gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ för varje kurva γ i D, ser vi vidare att (21) kan ersättas med

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \text{ för varje enkel sluten positivt orienterad kurva } \gamma \text{ i } D. \tag{22}$$

Vi visar nu att (22) gäller. Vi studerar separat enkla slutna positivt orienterade kurvor i D som inte omsluter origo, och separat sådana kurvor som omsluter origo.

Låt γ vara en godtycklig enkel sluten positivt orienterad kurva i D som inte omsluter origo. Beteckna med E det område som γ omsluter. Då gäller att $E \cup \gamma \subset D$ och det följer av Greens formel och av (20) att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_E (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy = \iint_E 0\,dxdy = 0,$$

så (22) gäller i detta fall.

Låt nu γ vara en godtycklig enkel sluten positivt orienterad kurva i D som omsluter origo. Låt γ_a beteckna cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ ett varv moturs, och låt $a > 0$ vara så litet att γ_a helt ligger innanför γ. Låt vidare E nu beteckna området mellan γ_a och γ. Då gäller att $E \cup \gamma \cup \gamma_a \subset D$ och det följer av Greens formel och av (20) att

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + \int_{-\gamma_a} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \tag{23}$$

$$= \iint_E (Q_1'(x,y) - P_2'(x,y))\,dxdy = \iint_E 0\,dxdy = 0.$$

En parameterframställning av γ_a är $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $-\pi \le \theta \le \pi$, och den ger att

$$\int_{-\gamma_a} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{\gamma_a} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \tag{24}$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} -\left(\frac{(a\cos\theta)\left(a^{10}\sin^{10}\theta\right)}{a^{12}\cos^{12}\theta + a^{12}\sin^{12}\theta}(-a\sin\theta) + \frac{\left(a^2\cos^2\theta\right)\left(a^9\sin^9\theta\right)}{a^{12}\cos^{12}\theta + a^{12}\sin^{12}\theta}(a\cos\theta)\right)d\theta$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta\sin^{11}\theta + \cos^3\theta\sin^9\theta}{\cos^{12}\theta + \sin^{12}\theta}\,d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left(\cos\theta\sin^9\theta\right)\left(\sin^2\theta + \cos^9\theta\right)}{\cos^{12}\theta + \sin^{12}\theta}\,d\theta$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\theta\sin^9\theta}{\cos^{12}\theta + \sin^{12}\theta}\,d\theta = 0.$$

Sista likheten ovan följer av att funktionen

$$\frac{\cos\theta\sin^9\theta}{\cos^{12}\theta + \sin^{12}\theta}$$

är en udda funktion av θ. Av (23) och (24) följer att (22) gäller även i detta fall.

Villkoret (22) är således alltid uppfyllt och följaktligen är kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ oberoende av vägen för kurvor γ i D.

Vi beräknar nu kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ då γ är någon kurva i D från punkten $(1,0)$ till punkten $(0,1)$. Låt γ_0 vara en sådan kurva. För $T > 1$ låt γ_{1T} vara räta linjen från punkten $(1,0)$ till punkten $(T,0)$, låt γ_{2T} vara räta linjen från punkten $(T,0)$ till punkten $(T,1)$, och låt γ_{3T} vara räta linjen från punkten $(0,1)$ till punkten $(T,1)$, samt sätt $\gamma_T = \gamma_{1T} \cup \gamma_{2T} \cup (-\gamma_{3T})$. Den givna kurvintegralen $\int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ oberoende av vägen för kurvor γ i D, och kurvorna γ_0 och γ_T är två kurvor i D med samma start- och slutpunkt. Kurvintegralerna $\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ och $\int_{\gamma_T} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ är alltså lika. Denna likhet tillsammans med definitionen av γ_T samt att $\int_{-\Gamma} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_\Gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ger att

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\gamma_{1T}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$
$$+ \int_{\gamma_{2T}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int_{\gamma_{3T}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Men på γ_{1T} gäller $y = 0$, vilket medför att $\int_{\gamma_{1T}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, och alltså har vi att

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_{\gamma_{2T}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy - \int_{\gamma_{3T}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{25}$$

Parametriseringen $x = T$, $y = t$, $0 \le t \le 1$ av γ_{2T} och parametriseringen $x = t$, $y = 1$, $0 \le t \le T$ av γ_{3T} ger med (25) att

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{T^2 t^9}{T^{12} + t^{12}}\,dt + \int_0^T \frac{t}{t^{12} + 1}\,dt. \tag{26}$$

Här i (26) är T ett godtyckligt tal > 1. För godtyckligt $T > 1$ har vi vidare att

$$0 < \int_0^1 \frac{T^2 t^9}{T^{12} + t^{12}}\,dt < \int_0^1 \frac{T^2}{T^{12}}\,dt = \frac{1}{T^{10}}, \quad \text{som} \to 0 \text{ då } T \to \infty.$$

Låter vi $T \to \infty$ i (26) får vi således att

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \int_0^\infty \frac{t}{t^{12} + 1}\,dt.$$

Men

$$\int_0^\infty \frac{t}{t^{12}+1}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{u^6+1}\,du,$$

som variabelsubstututionen $u = t^2$ visar. Vi har alltså att

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{t^6+1}\,dt. \tag{27}$$

Integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^6+1}\,dt$$

kan beräknas med residykalkyl. Ett sätt att göra det visas i de avlutande exemplen i kompendiet "Något om analytiska funktioner". Där visas mera allmänt att

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1}\,dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{för godtyckligt heltal } n \geq 2.$$

Se kompendiet för detaljerna i denna beräkning. Speciellt får vi för $n = 6$ att

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3},$$

vilket med (27) ger att

$$\int_{\gamma_0} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \frac{\pi}{6}.$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.