MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Erik Svensson

Tentamensskrivning i
Matematisk analys IV
140815

Inga hjälpmedel tillåtna.

Problemdel

1. Låt γ_1 vara cirkelbågen $y = \sqrt{1-x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$ från punkten $(1,0)$ till punkten $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, och låt γ_2 vara parabelbågen $y = 5 - 6x^2$, $-1 \leq x \leq 1$ från punkten $(1,-1)$ till punkten $(-1,-1)$. Beräkna de båda kurvintegralerna
$$\int_{\gamma_1} -\frac{1}{5}y^5\,dx + \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3y^2\right)dy \quad \text{och} \quad \int_{\gamma_2} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$
10 p

2. Betrakta funktionerna $f(x,y,z) = x+y+z$ och $g(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+\frac{15}{4}xyz-2$. Låt A vara mängden $g(x,y,z)=0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Motivera att funktionen $f(x,y,z)$ har ett största och ett minsta värde på mängden A, bestäm största och minsta värdet, och ange varje punkt där dessa värden antas. 10 p

3. a) Antag att $a_n > 0$ för alla heltal $n \geq 0$ och att serien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ är konvergent. Visa att serien $\sum_{n=0}^{\infty}(e^{a_n}-1)$ då är konvergent. 5 p

   b) Bestäm de reella tal a för vilka den generaliserade integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^a}\,dx$ är konvergent. 5 p

4. Låt n vara ett heltal ≥ 1, och låt kurvan γ i det komplexa talplanet $\mathbf{C}$ vara cirkeln $|z|=1$ ($z \in \mathbf{C}$) ett varv moturs. Visa att $\displaystyle\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\,d\theta = -\frac{i}{2^{2n}}\int_\gamma \frac{\left(z^2+1\right)^{2n}}{z^{2n+1}}\,dz$ och
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta = -\frac{i}{4}\int_\gamma \frac{z^n}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}\,dz - \frac{i}{4}\int_\gamma \frac{1}{z^n\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}\,dz,$$
samt beräkna $\displaystyle\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2n}\,d\theta$ och $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{5+4\cos\theta}\,d\theta$ uttryckta i n. 10 p

5. Sätt $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$. Betrakta kurvintegralen
$$\int_\gamma -\frac{xy^{10}}{(x^2+z^2)^6+y^{12}}\,dx + \frac{(x^2+z^2)y^9}{(x^2+z^2)^6+y^{12}}\,dy - \frac{y^{10}z}{(x^2+z^2)^6+y^{12}}\,dz.$$
Kurvintegralen är definierad för kurvor γ i området D. Visa att kurvintegralen är oberoende av vägen för kurvor γ i D. Beräkna kurvintegralens värde då γ är någon kurva i D från punkten $(-1,-1,-1)$ till punkten $(1,1,1)$. Låt M vara mängden av alla kurvor i D som startar i en punkt i xz-planet (planet $y=0$) och slutar i en punkt på y-axeln. Visa att kurvintegralen har samma värde för varje kurva $\gamma \in M$ och bestäm detta värde. 10 p

Var god vänd.

Teoridel

Välj en av följande två uppgifter.

6. (d'Alemberts kvotkriterium) Serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ har nollskilda termer sådana att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \to A \text{ då } k \to \infty, \text{ där } 0 \leq A \leq \infty.$$

Visa att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är absolutkonvergent om $0 \leq A < 1$, och divergent om $1 < A \leq \infty$. 10 p

7. (Leibniz' konvergenskriterium för alternerande serier.) Antag att

(i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$

(ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$.

Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ då är konvergent och att seriens summa s uppfyller att $0 \leq s \leq a_1$.

10 p

Ett nödvändigt villkor för godkänd skrivning är att minst fyra av skrivningspoängen kommer från teoridelen.

Skrivningsåterlämning to 4/9 kl 12.00-12.15 i rum 328 hus 6, därefter i rum 204 hus 6.