Lösningar till Matematisk analys IV, 140815

1. Vi börjar med kurvintegralen

$$\int_{\gamma_1} -\frac{1}{5}y^5\,dx + \left(\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3y^2\right)\,dy.$$

Sätt

$$P(x,y) = -\frac{1}{5}y^5 \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3y^2.$$

Vi använder Greens formel för att beräkna den givna kurvintegralen. Eftersom γ inte är en sluten kurva måste vi då först på lämpligt sätt komplettera γ till en sluten kurva. Låt Γ_1 vara räta linjen $y = x$ från punkten $(0,0)$ till punkten $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, och låt Γ_2 vara räta linjen $y = 0$ från punkten $(0,0)$ till punkten $(1,0)$. Låt vidare D vara området $0 \le y \le x$, $x^2 + y^2 \le 1$. Då är kurvan $\gamma_1 \cup (-\Gamma_1) \cup \Gamma_2$ en sluten kurva och kurvan är den positivt orienterade randen till området D. Greens formel och att $\int_{-\Gamma} \ldots = -\int_{\Gamma} \ldots$ för kurvintegraler ger då att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (Q_1' - P_2')\,dxdy.$$

Men $Q_1' - P_2' = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$, och vi får att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \iint_D (x^2+y^2)^2\,dxdy + \int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{1}$$

En parametrisering av Γ_1 är $x = t$, $y = t$, $0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{2}}$, och den ger att

$$\int_{\Gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{5}t^5 \cdot 1 + \left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 \cdot t^2\right) \cdot 1\right)\,dt = \frac{2}{3}\int_0^{1/\sqrt{2}} t^5\,dt = \frac{1}{72}. \tag{2}$$

På Γ_2 är y konstant lika med noll och eftersom $P(x,0) = 0$ så är

$$\int_{\Gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{3}$$

Vidare har vi att

$$\iint_D (x^2+y^2)^2\,dxdy = \tag{4}$$

(Inför polära koordinater $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
I de polära koordinaterna är D området $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$.)

$$= \iint_{\substack{0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta < \pi/4}} (r^2)^2\,r\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{5}\int_0^1 r^4\,dr = \frac{\pi}{24}.$$

Insättning av (2), (3) och (4) i (1) ger att

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \frac{\pi}{24} + \frac{1}{72}.$$

Vi övergår nu till kurvintegralen

$$\int_{\gamma_2} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Sätt nu istället

$$P(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad \text{och} \quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Funktionerna P och Q är definierade i $(x,y) \neq (0,0)$. Derivering ger att $Q_1'(x,y) - P_2'(x,y) = 0$ i $(x,y) \neq (0,0)$. Sätt $E = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y \leq 0\}$. Kurvan γ är då en kurva i E. Eftersom P_2' och Q_1' är kontinuerliga i E, likheten $Q_1' - P_2' = 0$ gäller i E, och E är en öppen enkelt sammanhängande delmängd av R^2, så är kurvintegralen

$$\int_{\Gamma} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

oberoende av vägen för kurvor Γ i E. Låt σ vara cirkelbågen $x^2+y^2=2$, $y \geq -1$, från punkten $(1,-1)$ till punkten $(-1,-1)$. Då är kurvan σ också en kurva i E. Kurvorna γ_2 och σ i E har har samma start- och slutpunkt och följaktligen gäller att

$$\int_{\gamma_2} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_{\sigma} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy. \tag{5}$$

Kurvintegralen längs σ kan enkelt beräknas genom att använda parametriseringen $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$, $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{5\pi}{4}$ av σ. Vi får att

$$\int_{\sigma} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \left(-\frac{\sqrt{2}\sin t}{2}(-\sqrt{2}\sin t) + \frac{\sqrt{2}\cos t}{2}\sqrt{2}\cos t \right) dt = \tag{6}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} dt = \frac{3\pi}{2}.$$

Av (5) och (6) följer att

$$\int_{\gamma_2} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \frac{3\pi}{2}.$$

2. Vi motiverar först att den givna mängden A är kompakt genom att motivera att A är sluten och begränsad. Låt B vara mängden $g(x,y,z) = 0$, och låt C vara mängden $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Då är $A = B \cap C$. Mängden B är sluten eftersom funktionen $g(x,y,z)$ är kontinuerlig i hela $\mathbf{R}^3$, och mängden C är också sluten. Snitt av slutna mängder är alltid en sluten mängd. Mängden $A = B \cap C$ är således sluten. Vidare har vi att

$$(x,y,z) \in A \quad \Longleftrightarrow \quad x^3+y^3+z^3+\frac{15}{4}xyx = 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \quad \Longrightarrow$$

$$0 \leq x^3 \leq 2,\ 0 \leq y^3 \leq 2,\ 0 \leq z^3 \leq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x \leq \sqrt[3]{2},\ 0 \leq y \leq \sqrt[3]{2},\ 0 \leq z \leq \sqrt[3]{2}.$$

Mängden A är således också begränsad. Mängden A är alltså både sluten och begränsad och därmed kompakt. Funktionen $f(x,y,z)$ är kontinuerlig på hela $\mathbf{R}^3$ och speciellt kontinuerlig på A. Enligt sats om kontinuerliga funktioner har en funktion som är kontinuerlig på en kompakt mängd alltid ett största och ett minsta värde på den kompakta mängden. Sammantaget motiverar detta att $f(x,y,z)$ har ett största och ett minsta värde på A.

Enligt teorin för optimering med bivillkor gäller att varje punkt där $f(x,y,z)$ antar sitt största och minsta värdet på A finns med bland punkterna i 1), 2) och 3) nedan.

1) Punkter $(x, y, z) \in A$ sådana att $\nabla f(x, y, z)$ och $\nabla g(x, y, z)$ är linjärt beroende.

Derivering ger att $\nabla f(x, y, z) = (1, 1, 1)$ och att $\nabla g(x, y, z) = 3(x^2 + \frac{5}{4}yz, y^2 + \frac{5}{4}xz, z^2 + \frac{5}{4}xy)$. Eftersom $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ för alla $(x, y, z) \in A$ gäller att $\nabla f(x, y, z)$ och $\nabla g(x, y, z)$ är linjärt beroende på A om och endast om $\nabla g(x, y, z) = \lambda \nabla f(x, y, z)$ för något reellt tal λ. Men $\nabla g(x, y, z) = \lambda \nabla f(x, y, z)$ är ekvivalent med att

$$\begin{cases} x^2 + \frac{5}{4}yz = \lambda \\ y^2 + \frac{5}{4}xz = \lambda \\ z^2 + \frac{5}{4}xy = \lambda. \end{cases}$$

Det följer att

$$\begin{cases} x^2 + \frac{5}{4}yz = y^2 + \frac{5}{4}xz \\ x^2 + \frac{5}{4}yz = z^2 + \frac{5}{4}xy. \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 - \frac{5}{4}xz + \frac{5}{4}yz = 0 \\ x^2 - z^2 - \frac{5}{4}xy + \frac{5}{4}yz = 0. \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) - \frac{5}{4}z(x - y) = 0 \\ (x - z)(x + z) - \frac{5}{4}y(x - z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x - y)\left(x + y - \frac{5}{4}z\right) = 0 \\ (x - z)\left(x + z - \frac{5}{4}y\right) = 0. \end{cases}$$

Vi får fyra olika möjligheter här.

1a) $x - y = 0$ och $x - z = 0 \iff x = y = z$.

Med $(x, y, z) \in A$ ger det att $g(x, x, x) = 0$ och $x \geq 0 \iff \frac{27}{4}x^3 = 2$ och $x \geq 0 \iff x = \frac{2}{3}$. Här får vi alltså punkten $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Motsvarande funktionsvärde är $f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 2$.

1b) $x - y = 0$ och $x + z - \frac{5}{4}y = 0 \iff y = x$ och $z = \frac{1}{4}x$.

Med $(x, y, z) \in A$ ger det att $g\left(x, x, \frac{1}{4}x\right) = 0$ och $x \geq 0 \iff \frac{189}{64}x^3 = 2$ och $x \geq 0 \iff x = \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$. Här får vi alltså punkten $\left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)$. Motsvarande funktionsvärde i den punkten är $f\left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$.

1c) $x + y - \frac{5}{4}z = 0$ och $x - z = 0 \iff y = \frac{1}{4}x$ och $z = x$.

På grund av symmetri och räkningen i 1b) får vi här punkten $\left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)$ med tillhörande funktionsvärde $f\left(\frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ (samma värde som i 1b)).

1d) $x + y - \frac{5}{4}z = 0$ och $x + z - \frac{5}{4}y = 0 \iff x = \frac{1}{4}z$ och $y = z$.

På grund av symmetri och räkningen i 1b) får vi här punkten $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)$ med tillhörande funktionsvärde $f\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{2}{7}}$ (samma värde som i 1b)).

2) De punkter bland kantpunkterna (relativa randpunkterna) till ytan A där restriktionen av f till kantpunkterna har ett lokalt extremvärde.

Vi får tre delfall här, dels restriktionen av f till de kantpunkter där $z = 0$, dels restriktionen av f till de kantpunkter där $y = 0$ och dels restriktionen av f till de kantpunkter där $x = 0$. Vi behandlar delfallet med restriktionen av f till de kantpunkter där $z = 0$. I övriga två delfall här antar f samma funktionsvärden som i detta delfall på grund av symmetri. Vi har att $f(x, y, 0) = x + y$ och att $g(x, y, 0] = x^3 + y^3 - 2$. Vi ska alltså i det valda delfallet undersöka funktionen $u(x, y) = x + y$ under bivillkoret $v(x, y) = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, där $v(x, y) = x^3 + y^3 - 2$.

Ett lokalt extremvärde till u under bivillkoret kan antas där $\nabla u(x, y) = (1, 1)$ och $\nabla v(x, y) = 3(x^2, y^2)$ är linjärt beroende samt bivillkoret är uppfyllt. Enligt teorin för determinanter är två vektorer i $\mathbf{R}^2$ linjärt beroende om och endast om deras determinant är noll. Det följer att $\nabla u(x, y)$ och $\nabla v(x, y)$ är linjärt beroende $\iff$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} = 0 \iff y^2 = x^2 \iff y = \pm x.$$

Av $y = x$ och bivillkoret $v(x, y) = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, får vi $2x^3 = 2$ och $x \geq 0 \iff x = 1$. Värdet $x = 1$ ger $y = x = 1$. Funktionsvärdet $u(1, 1) = 2$. Av $y = -x$ och bivillkoret $v(x, y) = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, får vi $x = y = 0$ och $-2 = 0$, vilket inte går.

Ett lokalt extremvärde till u under bivillkoret kan också antas i någon av ändpunkterna till bivillkorskurvan $v(x,y) = 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0 \iff x^3 + y^3 = 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Ändpunkterna är $(\sqrt[3]{2}, 0)$ och $(0, \sqrt[3]{2})$. Motsvarande funktionsvärden är $u(\sqrt[3]{2}, 0) = \sqrt[3]{2}$ och $u(0, \sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$.

Ett lokalt extremvärde till u under bivillkoret kan slutligen också antas i punkter på bivillkorskurvan där någon av $\nabla u(x,y)$ eller $\nabla v(x,y)$ inte existerar, men några sådana punkter finns inte.

I fall 2) får vi alltså två intressanta funktionsvärden, 2 och $\sqrt[3]{2}$. Problemets symmetri och räkningarna i det ovan behandlade delfallet av 2) visar att dessa värden antas i punkterna $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ och $(0,1,1)$, respektive i punkterna $(\sqrt[3]{2}, 0, 0)$, $(0, \sqrt[3]{2}, 0)$ och $(0, 0, \sqrt[3]{2})$.

3) Punkter $(x,y,z) \in A$ sådana att någon av $\nabla f(x,y,z)$ och $\nabla g(x,y,z)$ ej existerar.
Sådana punkter finns ej.

Av 1), 2) och 3) framgår att största värdet av f på A är $\max\left(2, 3\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \sqrt[3]{2}\right)$ och att minsta värdet av f på A är $\min\left(2, 3\sqrt[3]{\frac{2}{7}}, \sqrt[3]{2}\right)$. Vi har att

$$2^3 = 8 = \frac{56}{7}, \quad \left(3\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)^3 = \frac{54}{7} \quad \text{och} \quad \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2 = \frac{14}{7}.$$

Det följer att största värdet av f på A är 2 och att minsta värdet av f på A är $\sqrt[3]{2}$. Största värdet antas i punkterna $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$ och $(0,1,1)$, och minsta värdet antas i punkterna $(\sqrt[3]{2}, 0, 0)$, $(0, \sqrt[3]{2}, 0)$ och $(0, 0, \sqrt[3]{2})$.

3. a) Det antas att $a_n > 0$ för alla $n \geq 0$. Det medför att

(7) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ och } \sum_{n=0}^{\infty} (e^{a_n} - 1) \text{ är positiva serier.}$$

Det antas också att

(8) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ är konvergent.}$$

Av (8) följer att $a_n \to 0$ då $n \to \infty$, vilket tillsammans med att

$$\frac{e^x - 1}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0$$

(ett standardgränsvärde) medför att

(9) $$\frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \to 1 \text{ då } n \to \infty.$$

Av (7), (8), (9) och ett jämförelsekriterium för positiva serier följer att serien $\sum_{n=0}^{\infty} (e^{a_n} - 1)$ är kovergent.

b) Den givna generaliserade integralen är en positiv generaliserad integral, och den är generaliserad på två sätt, dels genom att integranden inte är definierad i $x = 0$ och dels genom att övre intgrationsgränsen är ∞. Vi gör därför en uppdelning

(10) $$\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x^a}\, dx = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x^a}\, dx + \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x^a}\, dx.$$

Den första integralen till höger är enbart generaliserad genom att integranden är odefinierad i $x = 0$, och den andra integralen till höger är enbart generaliserad genom att övre integrationsgränsen är ∞. Enligt teorin för generaliserade integraler är den givna generaliserade integralen konvergent precis om båda integralerna till höger i (10) båda är konvergenta. Vi studerar nu de de båda integralerna till höger i (10) var för sig.

Med hjälp av Tayloruvecklingen $\arctan x = x + O(x^3)$ för x nära noll får vi att

$$\frac{\arctan x}{x} = \frac{x + O(x^3)}{x} = 1 + O(x^2) \to 1 \text{ då } x \to 0.$$

Det visar att

$$\frac{\arctan x}{x^a} \Big/ \frac{1}{x^{a-1}} = \frac{\arctan x}{x} \to 1 \text{ då } x \to 0. \tag{11}$$

Det gäller att den generaliserade stadardintegralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^b}\, dx \text{ är konvergent precis om } b < 1$$

och följaktligen gäller att

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{a-1}}\, dx \text{ är konvergent precis om } a < 2. \tag{12}$$

Av (11), (12) och ett jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler följer att

$$\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^a}\, dx \text{ är konvergent precis om } a < 2. \tag{13}$$

Eftersom $\arctan x \to \frac{\pi}{2}$ då $x \to \infty$ har vi att

$$\frac{\arctan x}{x^a} \Big/ \frac{1}{x^a} = \arctan x \to \frac{\pi}{2} \text{ då } x \to \infty. \tag{14}$$

Det gäller att den generaliserade stadardintegralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}\, dx \text{ är konvergent precis om } a > 1. \tag{15}$$

Av (14), (15) och ett jämförelsekriterium för positiva generaliserade integraler följer att

$$\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^a}\, dx \text{ är konvergent precis om } a > 1. \tag{16}$$

Resultaten (13) och (16) visar att de båda integralerna till höger i (10) båda är konvergenta precis om $1 < a < 2$. Den givna generaliserade integralen är därför konvergent precis om $1 < a < 2$.

4. Sätt $z = e^{i\theta}$. Tillsammans med Eulers formel för cosinusfunktionen ger det att

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ och } \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(e^{in\theta} + e^{-in\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right).$$

Vi har också att

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz, \text{ som ger } d\theta = \frac{1}{iz}\, dz$$

Vidare övergår intervallet $[0, 2\pi[$ genom sambandet $z = e^{i\theta}$ i den angivna kurvan γ i det komplexa talplanet. Följaktligen har vi att

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta = \int_\gamma \left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^{2n} \frac{1}{iz}\, dz = -\frac{i}{2^{2n}} \int_\gamma \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}\, dz$$

och

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{5+4\cos\theta}\, d\theta = \int_\gamma \frac{\frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)}{5+4\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} \frac{1}{iz}\, dz = -\frac{i}{4}\int_\gamma \frac{z^n + z^{-n}}{\frac{5}{2}z + z^2 + 1}\, dz$$

$$= -\frac{i}{4}\int_\gamma \frac{z^n + z^{-n}}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}\, dz = -\frac{i}{4}\int_\gamma \frac{z^n}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}\, dz - \frac{i}{4}\int_\gamma \frac{1}{z^n\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}\, dz.$$

De angivna likheterna för de givna trigonometriska integralern är därmed visade. Vi beräknar nu de givna trigonometriska integralerna genom att använda dessa likheter. Sätt

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}, \quad g(z) = \frac{z^n}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)} \quad \text{och} \quad h(z) = \frac{1}{z^n\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}.$$

Då gäller alltså att

$$(17) \quad \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta = -\frac{i}{2^{2n}}\int_\gamma f(z)\, dz \quad \text{och} \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{5+4\cos\theta}\, d\theta = -\frac{i}{4}\int_\gamma g(z)\, dz - -\frac{i}{4}\int_\gamma h(z)\, dz.$$

Kurvan γ i det komplexa talplanet är cirkeln $|z| = 1$ ett varv moturs. Nämnaren i $f(z)$, polynomet z^{2n+1}, har enda nollstället 0 innanför γ. Nämnaren i $g(z)$, polynomet $\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)$, har nollstället $-\frac{1}{2}$ innanför γ och nollstället -2 utanför γ. Nämnaren i $h(z)$, polynomet $z^n\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)$, har nollställena 0 och $-\frac{1}{2}$ innanför γ och nollstället -2 utanför γ. Enligt sats om analytiska funktioner gäller därför att

$$(18) \quad \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i\, Res\,(f(z), 0)\,, \quad \int_\gamma g(z)\, dz = 2\pi i\, Res\left(g(z), -\frac{1}{2}\right) \quad \text{och}$$

$$\int_\gamma h(z)\, dz = 2\pi i\left(Res\,(h(z), 0) + Res\left(h(z), -\frac{1}{2}\right)\right).$$

Enligt ett resultat för beräkning av residyvärden gäller följande. Låt $c \in \mathbf{C}$, låt r vara ett heltal ≥ 1, och låt $u(z)$ vara analytisk i en omgivning av punkten c. Då gäller att

$$Res\left(\frac{1}{((z-c)^r}u(z), c\right) = \frac{1}{(r-1)!}u^{(r-1)}(c).$$

Med hjälp av detta residyberäkningsresultat får vi att

$$(19) \quad Res\,(f(z), 0) = Res\left(\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}, 0\right) = \frac{1}{(2n)!}\left(D^{2n}(z^2+1)^{2n})\right)\Big|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{(2n)!}\left(D^{2n}\left(z^{4n} + \ldots + \binom{2n}{n}z^{2n} + \ldots + 1\right)\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{(2n)!}\left(4n\cdot(4n-1)\cdot\ldots\cdot(2n+1)\, z^{2n} + \ldots + 2n\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot\binom{2n}{n}\right)\Bigg|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{(2n)!}\cdot 2n\cdot(2n-1)\cdot\ldots\cdot 1\cdot\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}.$$

och

$$(20) \quad Res\left(g(z), -\frac{1}{2}\right) = Res\left(\frac{z^n}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z+2)}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{z^n}{z+2}\Big|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{3\cdot 2^{n-1}}.$$

Residysumman

$$Res\,(h(z), 0) + Res\left(h(z), -\frac{1}{2}\right)$$

kan också beräknas genom att tillämpa samma residyberäkningsresultat på var och en av de båda termerna i residysumman. Den första termen i residysumman är dock därvid lite arbetsam att beräkna. Enklare är istället att först att använda summaresidyformeln för rationella funktioner. För den rationella funktionen

$$h(z) = \frac{1}{z^n \left(z + \frac{1}{2}\right)(z+2)}$$

ger summaresidyformeln att

$$Res\,(h(z), 0) + Res\left(h(z), -\frac{1}{2}\right) + Res\,(h(z), -2) = 0$$

och alltså har vi att

$$Res\,(h(z), 0) + Res\left(h(z), -\frac{1}{2}\right) = -Res\,(h(z), -2)\,.$$

Residyvärdet $Res\,(h(z), -2)$ kan enkelt beräknas med residyberäkningsresultatet ovan. Vi får att

(21)
$$Res\,(h(z), 0) + Res\left(h(z), -\frac{1}{2}\right) = -Res\,(h(z), -2)$$

$$= -Res\left(\frac{1}{z^n \left(z + \frac{1}{2}\right)(z+2)}, -2\right) = -\frac{1}{z^n\left(z+\frac{1}{2}\right)}\bigg|_{z=-2} = \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Av (17), (18), (19), (20) och (21) följer att

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n}\, d\theta = -\frac{i}{2^{2n}} \cdot 2\pi i \cdot \binom{2n}{n} = \frac{\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

och att

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{5 + 4\cos\theta}\, d\theta = -\frac{i}{4} \cdot 2\pi i \cdot \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}} - \frac{i}{4} \cdot 2\pi i \cdot \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}(-1)^n.$$

5. Sätt

$$P(x,y,z) = -\frac{xy^{10}}{(x^2+z^2)^6 + y^{12}}, \quad Q(x,y,z) = \frac{(x^2+z^2)y^9}{(x^2+z^2)^6 + y^{12}}, \quad R(x,y,z) = -\frac{y^{10}z}{(x^2+z^2)^6 + y^{12}}$$

och $\mathbf{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ för $(x,y,z) \in D$. Den givna kurvintegralen är då kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r$ för kurvor γ i D. Området $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$ är en öppen enkelt sammanhängande delmängd av $\mathbf{R}^3$ och $\mathbf{F} \in C^1(D)$. Kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r$ är därför oberoende av vägen för kurvor γ i D om och endast om $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ i D. Med de införda beteckningarna har vi att

$$\nabla \times \mathbf{F} = (D_1, D_2, D_3) \times (P, Q, R) = \big(R_2' - Q_3', -(R_1' - P_3'), Q_1' - P_2'\big),$$

Derivering ger att

$$R_2' - Q_3' = -\frac{10y^9 z((x^2+z^2)^6 + y^{12}) - y^{10}z \cdot 12y^{11}}{((x^2+z^2)^6 + y^{12})^2}$$
$$- \frac{2zy^9((x^2+z^2)^6 + y^{12}) - (x^2+z^2)y^9 \cdot 6(x^2+z^2)^5 \cdot 2z}{((x^2+z^2)^6 + y^{12})^2} = 0,$$

$$R_1' - P_3' = -\left(-\frac{y^{10}z \cdot 6(x^2+z^2)^5 \cdot 2x}{((x^2+z^2)^6 + y^{12})^2}\right) + \left(-\frac{xy^{10} \cdot 6(x^2+z^2)^5 \cdot 2z}{((x^2+z^2)^6 + y^{12})^2}\right) = 0 \quad \text{och}$$

$$Q_1' - P_2' = \frac{2xy^9((x^2+z^2)^6 + y^{12}) - (x^2+z^2)y^9 \cdot 6(x^2+z^2)^5 \cdot 2x}{((x^2+z^2)^6 + y^{12})^2}$$
$$+ \frac{10xy^9((x^2+z^2)^6 + y^{12}) - xy^{10} \cdot 12y^{11}}{((x^2+z^2)^6 + y^{12})^2} = 0$$

i D. Således är $\nabla\times\mathbf{F}=0$ i D. Kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r$ är alltså oberoende av vägen för kurvor γ i D. Kurvintegralen har alltså samma värde för alla kurvor i D som har samma start- och slutpunkt. Vi beräknar nu värdet av kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r$ då γ är någon kurva i D från punkten $(-1,-1,-1)$ till punkten $(1,1,1)$. Vilken sådan kurva γ vi väljer är likgiltigt på grund av oberoendet av vägen. Kurvan $\gamma_0=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$ där kurvan γ_1 är är räta linjen från punkten $(-1,-1,-1)$ till punkten $(1,-1,-1)$, kurvan γ_2 är är räta linjen från punkten $(1,-1,-1)$ till punkten $(1,1,-1)$ och kurvan γ_3 är är räta linjen från punkten $(1,1,-1)$ till punkten $(1,1,1)$, är en kurva i D från punkten $(-1,-1,-1)$ till punkten $(1,1,1)$. En parametrisering av γ_1 är $x=t$, $y=-1$, $z=-1$, $-1\le t\le 1$; en parametrisering av γ_2 är $x=1$, $y=-t$, $z=-1$, $-1\le t\le 1$; och en parametrisering av γ_3 är $x=1$, $y=-1$, $z=t$, $-1\le t\le 1$. Definitionen av γ_0 ger med hjälp av angivna parametriseringar att

$$\int_{\gamma_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r=\int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r+\int_{\gamma_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r+\int_{\gamma_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{t}{(t^2+1)^2+1)}\,dt+\int_{-1}^{1}\frac{2t^9}{64+t^{12}}\,dt-\int_{-1}^{1}\frac{t}{(1+t^2)^2+1}\,dt=0.$$

De tre integralerna på sista raden ovan är ju alla noll eftersom $\int_{-a}^{a}f(t)\,dt=0$ $(a>0)$ om funktionen $f(t)$ är en udda funktion i intervallet $[-a,a]$.

Mängden M är mängden av alla kurvor i D som startar i en punkt i xz-planet (planet $y=0$) och slutar i en punkt på y-axeln. Vi visar nu att den givna kurvintegralen har samma värde för varje kurva i M och bestämmer detta gemensamma värde. Låt punkten $(a,0,c)$ vara en godtycklig punkt i xz-planet i D och låt punkten $(0,b,0)$ vara en godtycklig punkt på y-axeln i D. Fixera $T>0$ godtyckligt. Vi betraktar fallen $b>0$ och $b<0$ var för sig.

Fallet $b>0$.

Låt Γ_1 vara någon kurva i xz-planet i D från punkten $(a,0,c)$ till punkten $(T,0,0)$, låt Γ_2 vara räta linjen från punkten $(T,0,0)$ till punkten $(T,1,0)$, låt Γ_3 vara räta linjen från punkten $(0,1,0)$ till punkten $(T,1,0)$, och låt Γ_4 vara räta linjen från punkten $(0,1,0)$ till punkten $(0,b,0)$. (Observera att Γ_4 inte är en kurva i D om $b<0$.) Kurvan $\Gamma_0=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup(-\Gamma_3)\cup\Gamma_4$ är då en kurva i D från punkten $(a,0,c)$ till punkten $(0,b,0)$. Definitionen av Γ_0 tillsammans med att $\int_{-\Gamma_3}\ldots=-\int_{\Gamma_3}\ldots$ ger att

$$\int_{\Gamma_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r=\int_{\Gamma_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r+\int_{\Gamma_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r-\int_{\Gamma_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r+\int_{\Gamma_4}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r.$$

Men $\int_{\Gamma_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r=0$ eftersom $y=0$ på Γ_1 och $\mathbf{F}(x,0,z)=0$, och $\int_{\Gamma_4}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r=0$ eftersom $x=z=0$ på Γ_4 och $\mathbf{F}(0,y,0)=0$, och således har vi att

$$\int_{\Gamma_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r=\int_{\Gamma_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r-\int_{\Gamma_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r.$$

Tillsammans med parametriseringen $x=T$, $y=t$, $z=0$, $0\le t\le 1$ av Γ_2 och parametriseringen $x=t$, $y=1$, $z=0$, $0\le t\le T$ av Γ_3 ger detta att

$$\int_{\Gamma_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r=\int_0^1\frac{T^2t^9}{T^{12}+t^{12}}\,dt+\int_0^T\frac{t}{t^{12}+1}\,dt.$$

Fallet $b<0$.

Detta fall behandlar vi ganska likartat med fallet $b>0$ Låt Γ_1 vara någon kurva i xz-planet i D från punkten $(a,0,c)$ till punkten $(T,0,0)$, låt Γ_2 vara räta linjen från punkten $(T,-1,0)$ till punkten $(T,0,0)$, låt Γ_3 vara räta linjen från punkten $(0,-1,0)$ till punkten $(T,-1,0)$, och låt Γ_4 vara räta linjen från punkten $(0,-1,0)$ till punkten $(0,b,0)$. (Observera att Γ_4 inte är en kurva i D om $b>0$.) Kurvan $\Gamma_0=\Gamma_1\cup(-\Gamma_2)\cup(-\Gamma_3)\cup\Gamma_4$ är då en kurva i D från punkten $(a,0,c)$ till punkten $(0,b,0)$. Definitionen av Γ_0 tillsammans med att $\int_{-\Gamma}\ldots=-\int_{\Gamma}\ldots$ för kurvintegraler ger att

$$\int_{\Gamma_0}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r=\int_{\Gamma_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r-\int_{\Gamma_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r-\int_{\Gamma_3}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r+\int_{\Gamma_4}\mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r.$$

Men $\int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = 0$ eftersom $y = 0$ på Γ_1 och $\mathbf{F}(x, 0, z) = 0$, och $\int_{\Gamma_4} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = 0$ eftersom $x = z = 0$ på Γ_4 och $\mathbf{F}(0, y, 0) = 0$, och således har vi att

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = -\int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r - \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r.$$

Tillsammans med parametriseringen $x = T$, $y = t$, $z = 0$, $-1 \leq t \leq 0$ av Γ_2 och parametriseringen $x = t$, $y = -1$, $z = 0$, $0 \leq t \leq T$ av Γ_3 ger detta att

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = -\int_{-1}^{0} \frac{T^2 t^9}{T^{12} + t^{12}}\, dt + \int_0^T \frac{t}{t^{12} + 1}\, dt.$$

Men variabelsubstitutionen $t = -u$ visar att

$$-\int_{-1}^{0} \frac{T^2 t^9}{T^{12} + t^{12}}\, dt = \int_0^1 \frac{T^2 u^9}{T^{12} + u^{12}}\, du.$$

och alltså har vi att

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = \int_0^1 \frac{T^2 t^9}{T^{12} + t^{12}}\, dt + \int_0^T \frac{t}{t^{12} + 1}\, dt.$$

I båda de möjliga fallen $b > 0$ och $b < 0$ finns det således en kurva Γ_0 i D från en godtycklig punkt $(a, 0, c)$ i xz-planet i D till en godtycklig punkt $(0, b, 0)$ på y-axeln i D så att det för denna kurva Γ_0 i D gäller att

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = \int_0^1 \frac{T^2 t^9}{T^{12} + t^{12}}\, dt + \int_0^T \frac{t}{t^{12} + 1}\, dt. \tag{22}$$

Eftersom den givna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r$ är oberoende av vägen för kurvor γ i D och eftersom högerledet i (22) är oberoende av a, b och c gäller följaktligen att den givna kurvintegralen $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r$ har samma värde för varje kurva $\gamma \in M$. Vi får att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = \int_0^1 \frac{T^2 t^9}{T^{12} + t^{12}}\, dt + \int_0^T \frac{t}{t^{12} + 1}\, dt \quad \text{för alla } \gamma \in M\ . \tag{23}$$

I (23) är $T > 0$ godtyckligt. Likheten (23) gäller därför för godtyckligt $T > 0$. Vi kan därför låta $T \to \infty$ i (23). För godtyckligt $T > 0$ har vi att

$$0 < \int_0^1 \frac{T^2 t^9}{T^{12} + t^{12}}\, dt < \int_0^1 \frac{T^2}{T^{12}}\, dt = \frac{1}{T^{10}}, \quad \text{som} \to 0 \text{ då } T \to \infty.$$

Låter vi $T \to \infty$ i (23) får vi således att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = \int_0^\infty \frac{t}{t^{12} + 1}\, dt \quad \text{för alla } \gamma \in M\ .$$

Men

$$\int_0^\infty \frac{t}{t^{12} + 1}\, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{u^6 + 1}\, du,$$

som variabelsubstutitionen $u = t^2$ visar. Vi har alltså att

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{t^6 + 1}\, dt \quad \text{för alla } \gamma \in M\ . \tag{24}$$

Integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^6 + 1}\, dt$$

kan beräknas med residykalkyl. Ett sätt att göra det visas i de avlutande exemplen i kompendiet "Något om analytiska funktioner". Där visas mera allmänt att

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^n+1}\,dx = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} \quad \text{för godtyckligt heltal } n \geq 2.$$

Se kompendiet för detaljerna i denna beräkning. Speciellt får vi för $n = 6$ att

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{6\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{3},$$

vilket med (24) ger att

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}r = \frac{\pi}{3} \quad \text{för alla } \gamma \in M\ .$$

6. Se kurslitteraturen.

7. Se kurslitteraturen.