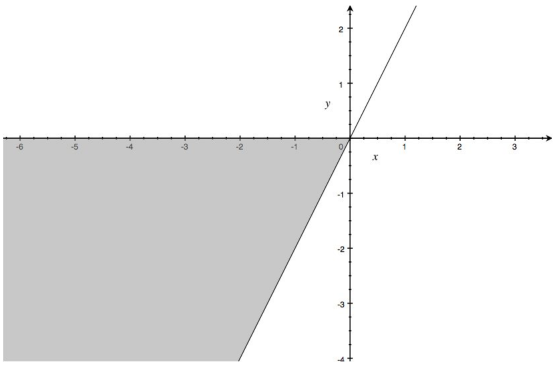
Lösningar till tentamen, Matematisk analys IV, 20150112

1. Först ska vi undersöka funktionen längs y-axeln dvs. $x = 0$, då $f(0, y) = -y^2$. Eftersom $f(0, y) = -y^2 \to -\infty$ då $y \to \infty$ betyder att $f(x, y)$ saknar minsta värde och vi kan se att det största värdet längs y-axeln är 0. Låt $y = ax$ då $f(x, y) = f(x, ax) = a(2 - a)x^2e^x$ och vi kan se att endast för $a \in (0, 2)$ antar funktionen $f(x, ax)$ positiva värden, så funktionen f antar det största värdet i ett område D begränsat med $y \leq 0$, $y \geq 2x$ och $x \leq 0$ (se bild nedan).



Eftersom det största värdet av uttrycket $a(a-2)$ är lika med 1 så $|f(x, ax)| \leq 1 \cdot x^2e^x$. Dessutom $x^2e^x \to 0$ då $x \to -\infty$. Det betyder att för varje $\varepsilon > 0$ finns det ett tal X sådan att $f(x, y) < \varepsilon$ för alla punkter i området D med $x < X$. Vi har också att det finns inga icke-deriverbara punkter, så funktionen antar det största värdet i ett lokalt maximum.

För att hitta max löser vi ekvationssystemet:

$$\begin{cases} f'_x = & (2y + 2xy - y^2)e^x & = 0, \\ f'_y = & (2x - 2y)e^x & = 0, \end{cases}$$

som ger stationära punkter $(0, 0)$ och $(-2, -2)$. Funktionsvärde i dessa punkter är $f(0, 0) = 0$ och $f(-2, -2) = 4e^{-2}$. Detta ger oss att

Svar. Största värde är $4e^{-2}$ och minsta värde saknas.

2. Vi undersöker med derivation villkoret $Q'_x = P'_y$.

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(2x^2 + 3y^2)^2} \cdot 6y,$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = -\dfrac{3y}{(2x^2 + 3y^2)^2} \cdot 4x.$

Vi ser att dessa uttryck är lika i hela planet förutom origo. Så i ett enkelt sammanhängande område som innehåller inte origo är vektorfältet (P, Q) ett potentialfält. Kurvan γ har startpunkt $\mathbf{a} = (x(0), y(0)) = (2, e)$ och slutpunkt $\mathbf{b} = (x(\pi), y(\pi)) = (0, e^{-1})$. För att hitta en potential i ett område som omfattar kurvan γ men innehåler inte origo integrerar vi P m a p x :

$$U(x, y) = \int \frac{2x}{2x^2 + 3y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{4x}{2x^2 + 3y^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2x^2 + 3y^2) + \varphi(y).$$

Om vi deriverar detta uttryck m a p y och jämförar med P ser vi att

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{3y}{2x^2 + 3y^2} + \varphi'(y) = \frac{3y}{2x^2 + 3y^2} \Rightarrow \varphi(y) = C.$$

Vi kan välja att $C = 0$ och då vår integralen är lika:

$$\int_\gamma \frac{2x}{2x^2 + 3y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{3y}{2x^2 + 3y^2}\,\mathrm{d}y = U(\mathbf{b}) - U(\mathbf{a}) = U(0, e^{-1}) - U(2, e) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{e^2(8 + 3e^2)}\right).$$

3. Vi kompletterar mantelytan Y_1 med ytan $Y_0 : z = 2, 4x^2 + y^2 \leq 4$ med normalen uppåt och får randen till ett område K där vi kan tillämpa Gauss sats. Då skriver vi:

$$\iint_{Y_0} u \cdot N\mathrm{d}S + \iint_{Y_1} u \cdot N\mathrm{d}S = \iiint_K \mathrm{div}u\,\mathrm{d}V,$$

där $K = \{(x, y, z) : \sqrt{4x^2 + y^2} \leq z \leq 2, 4x^2 + y^2 \leq 4\}$.
Vi beräknar $\mathrm{div}u = \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \dfrac{\partial u_3}{\partial z} = z + x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ och därför är den trippel integralen lika med (låt E vara ellipsen $4x^2 + y^2 \leq 4$)

$$\iiint_K \mathrm{div}u\,\mathrm{d}V = \iint_E \left(\int_{\sqrt{4x^2+y^2}}^2 z + x^2 + \frac{y^2}{4}\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E \left[\frac{z^2}{2} + (x^2 + \frac{y^2}{4})z \right]_{\sqrt{4x^2+y^2}}^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iint_E 2 - \frac{4x^2 + y^2}{4}\sqrt{4x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, & 0 \leq r \leq 1, & J = 2r \\ y = 2r\sin\varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, & \end{bmatrix}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2 - \frac{1}{4}(4r^2)^{3/2} \right) 2r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^1 4r - 4r^4\mathrm{d}r = 8\pi(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) = \frac{12}{5}\pi.$$

Normalen till ytan Y_0 är $N_0 = (0, 0, 1)$ och $z = 2$ så den dubbel integralen över Y_0 är lika med

$$\iint_{Y_0} u \cdot N\mathrm{d}S = \iint_{Y_0} \left(2x + e^{y^2+4}, x^2y - 2x, 4x^2 + \frac{y^2}{2} \right) \cdot (0, 0, 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_E 4x^2 + \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = [\text{elliptiska koordinater }] = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin^2\varphi)\, 2r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos^2\varphi + 1)r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 4 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} + 1\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi.$$

Det sökte flödet är lika med:

$$\iint_{Y_1} u \cdot N\mathrm{d}S = \frac{12}{5}\pi - 3\pi = -\frac{3}{5}\pi.$$

4. (a) Låt oss först omskriva serien till:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k+2}(x-3)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k+2}(x-3)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2(x-3))^k}{k+2}$$

och låt oss sätta nu $z = 2(x-3)$, så $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k+2}(x-3)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2}z^k = \bar{S}(z)$.

Konvergensradien till serien $\bar{S}(z)$ ges av

$$R_z = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{k+3}{k+2} \right| = 1.$$

I ändpunkterna $z = 1$ och $z = -1$ fås serierna

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} \quad \text{och} \quad \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2},$$

vilka den första är divergent (harmonisk serie) och den andra är konvergent (Leibniz' kriterium).
Konvergensintervallet till $\bar{S}(z)$ blir därför $[-1, 1)$ (för z variabeln).

För x variabeln $(S(x))$ blir konvergensintervallet då $\left[\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$.
Inom konvergensintervallet och för $z \neq 0$ har vi:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} z^k = \frac{1}{z^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k+2}}{k+2} = \frac{1}{z^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z t^{k+1} \mathrm{d}k = \frac{1}{z^2} \int_0^z \left(\sum_{k=1}^{\infty} t^{k+1} \right) \mathrm{d}t = \frac{1}{z^2} \int_0^z \frac{t^2}{1-t} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{z^2} \int_0^z -1 - t + \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{z^2} \left[-t - \frac{t^2}{2} - \ln(1-t) \right]_0^z = -\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{\ln(1-z)}{z^2}.$$

För $z = 0$ har vi automatisk att $\bar{S}(0) = 0$. Alltså har vi

$$\bar{S}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{\ln(1-z)}{z^2} \right), & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

Därför

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3} + 1 + \frac{\ln(7-2x)}{2(x-3)^2} \right), & x \neq 3 \\ 0 & x = 3. \end{cases}$$

(b) Vi har att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k+2} \left(-\frac{1}{4} \right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k+2} \left(-\frac{1}{4} \right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2} \left(-\frac{1}{2} \right)^k = \bar{S}\left(-\frac{1}{2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left(-(-2) - \frac{1}{2} - \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\frac{1}{4}} \right) = \frac{3}{4} - 2 \ln \frac{3}{2}.$$

5. Integrationsvägen kan deformeras till två små cirklar γ_1 och γ_2 med radie ε, där γ_1 omlöper punkten 0 ett varv i positiv led och γ_2 omlöper punkten i också ett varv i positiv led.

$$\int_\gamma \frac{1}{z(z-i)^3} \, \mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-i)^3}}{z} \, \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{z}}{(z-i)^3} \, \mathrm{d}z.$$

Låt $f_1(z) = \dfrac{1}{(z-i)^3}$ och $f_2(z) = \dfrac{1}{z}$. Nu ska vi använda Cauchy's integralsats till varje integral.

$$\int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-i)^3}}{z} \, \mathrm{d}z = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i \frac{1}{(-i)^3} = 2\pi.$$

För den andra integralen måste vi bestämma $f_2'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$ och $f_2''(z) = \dfrac{2}{z^3}$, ty

$$\frac{f_2''(i)}{2!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f_2(z)}{(z-i)^3} \, \mathrm{d}z.$$

$\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{z}}{(z-i)^3} \, \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{i^3} = -2\pi$. Slutligen har vi $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z(z-i)^3} \, \mathrm{d}z = 2\pi - 2\pi = 0.$