Lösningar till tentamen.

Analys 4,
2015-02-21.

1. a) Det är klart att $f(x,y) \geq 0$ och att $f(0,0) = 0$, alltså antas globalt minimum och är lika med 0. För maximum noterar vi att (med $r = \sqrt{x^2+y^2}$)

$$0 \leq f(x,y) = x^4y^2e^{-x^2-9y^2} \leq r^6e^{-r^2} \to 0.$$

Om vi väljer R så stort att $r^6e^{-r^2}$ är mindre än t ex $f(1,1)/2 = \frac{1}{2}e^{-10}$ för $x^2+y^2 > R^2$ så följer att maximum är lika med maximum i cirkelskivan $x^2+y^2 \leq R^2$, och antas i någon punkt där $\nabla f = (0,0)$.

För att hitta max deriverar vi

$$\begin{cases} f'_x &= 2x^3y^2(2-x^2)e^{-x^2-9y^2} = 0, \\ f'_y &= 2x^4y(1-9y^2)e^{-x^2-9y^2} = 0, \end{cases}$$

Uppenbarligen är alla punkter på koordinataxlarna nollställen till ∇f, men där är också $f = 0$, så dessa punkter är minpunkter. För att hitta max kan vi alltså anta att både x och y är skilda från 0. Därmed reducerar sig ovanstående ekvationer till

$$\begin{cases} 2-x^2 &= 0, \\ 1-9y^2 &= 0, \end{cases},$$

vilket ger de fyra punkterna $(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{3})$, som alla har funktionsvärdet $\frac{4}{9}e^{-3}$, vilket alltså är det sökta maxvärdet.

Svar: $\min = 0, \max = \frac{4}{9}e^{-3}$.

2. Vi beräknar först rotationen:

$$\mathbf{rotF} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2+yz & \cos y + xz & 4e^z + xy \end{vmatrix} =$$

$$= (x-x, y-y, z-z) = (0,0,0).$$

Eftersom planet är enkelt sammanhängande så är $\mathbf{rotF} = (0,0,0)$ nödvändigt och tillräckligt för att fältet ska vara ett potentialfält.

För att bestämma en potential U utgår vi från att

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) = (3x^2+yz, \cos y + xz, 4e^z + xy).$$

Vi får $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + yz \Rightarrow U = x^3 + xyz + G(y,z)$ som ger $\cos y + xz = \dfrac{\partial U}{\partial y} = xz + \dfrac{\partial G}{\partial y} \Rightarrow \dfrac{\partial G}{\partial y} = \cos y$, dvs $G(y,z) = \sin y + H(z)$. Vi kan nu skriva potentialen $U = x^3 + xyz + \sin y + H(z)$, vilket ger $4e^z + xy = \dfrac{\partial U}{\partial z} = xy + \dfrac{\partial H}{\partial z} \Rightarrow H(z) = 4e^z + C$, där vi kan välja $C = 0$. Sammanfattningsvis får vi alltså $U = x^3 + xyz + \sin y + 4e^z$. För arbetet fås

$$W = U(1,0,0) - U(0,\frac{\pi}{2},1) = 5 - (1+4e) = 4 - 4e.$$

Svar: Arbetet blir $4 - 4e$.

3. Vi observerar att vektorfältet på den yttre sfären $Y_1 : x^2+y^2+z^2 = 3$ är parallellt med normalvektorn och att

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

och att det på den inre sfären $Y_0 : x^2+y^2+z^2 = 2$ är anti-parallellt med normalvektorn och att

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = -\frac{1}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vi får $\Phi =$

$$\iint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iint_{Y_0} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{Y_0} dS + \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{Y_1} dS =$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} 4\pi(\sqrt{2})^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} 4\pi(\sqrt{3})^2 = 4\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Det går även bra att använda Gauss sats: vi får efter en kort räkning att $\operatorname{div} \mathbf{F} = 1/r^2$, vilket ger

$$\Phi = \iiint_D \frac{1}{r^2} dV = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} \frac{1}{r^2} dS \right) dr$$

$$= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 4\pi\, dr = 4\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Svar: Flödet blir $4\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

4. a) Integralen är generaliserad både i origo och oändligheten så vi delar upp i två delar:

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{\sin x}}{x^{5/4}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-e^{\sin x}}{x^{5/4}}\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1-e^{\sin x}}{x^{5/4}}\mathrm{d}x.$$

För att avgöra konvergensen hos den första delen MacLaurin-utvecklar vi täljaren: $1-e^{\sin x} = 1-(1+\sin x + O(\sin^2 x)) = -x + O(x^2)$, vilket ger att

$$\int_0^1 \frac{1-e^{\sin x}}{x^{5/4}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x^{1/4}} + O(x^{3/4})\right)\mathrm{d}x.$$

Denna integral inses lätt vara absolutkonvergent med hjälp av en jämförelse med $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,\mathrm{d}x$ enligt Jämförelsekriterium II.

För den andra delen observerar vi att

$$\int_1^\infty \left|\frac{1-e^{\sin x}}{x^{5/4}}\right|\mathrm{d}x \le \int_1^\infty \frac{e-1}{x^{5/4}}\mathrm{d}x = 4(e-1),$$

vilket visar att integralen är absolutkonvergent enligt Jämförelsekriterium I.

Tillsammans ger detta att den generaliserade integralen är konvergent.

b) Eftersom följden

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$$

är monotont avtagande och går mot 0 så följer att

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=2}^\infty (-1)^{k-1}a_k$$

är konvergent enligt Leibniz kriterium. Men serien är inte absolutkonvergent eftersom $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty a_k = \infty$, vilket t ex kan inses genom att jämföra med serien $\displaystyle\sum_{k=2}^\infty k^{-1/2}$ (enligt Jämförelsekriterium I). Slutsatsen blir att den givna serien är betingat konvergent.

Svar: a) Konvergent b) Betingat konvergent.

5. Integranden är analytisk i alla punkter innanför kurvan utom i $\pm i$. Vi kan därför deformera integrationsvägen till två cirklar Γ_1 och Γ_2 som genomlöps i positiv led och som båda har radie ρ, och centrum i i respektive $-i$, där ρ är ett godtyckligt tal som uppfyller $0 < \rho < 1$.

Vi ser nu enligt Cauchy's integralsats (med $f(z) = z^3/(z-3)(z+i)$) att

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_1} \frac{f(z)dz}{z-i}$$

$$= 2\pi i f(i) = \frac{\pi}{10}(-1+3i).$$

På samma sätt får vi (med $g(z) = z^3/(z-3)(z-i)$)

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z = \int_{\Gamma_2} \frac{g(z)dz}{z+i}$$

$$= 2\pi i g(-i) = \frac{\pi}{10}(1+3i).$$

(Den som känner till Residy-satsen kan naturligtvis lika gärna använda denna.) Detta ger nu att

$$\int_{\Gamma} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z =$$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_2} \frac{z^3}{(z-3)(z^2+1)}\mathrm{d}z =$$

$$\frac{\pi}{10}(-1+3i) + \frac{\pi}{10}(1+3i) = \frac{3\pi i}{5}.$$

Svar: Integralens värde är $\frac{3\pi i}{5}$.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.

/Martin Tamm, 150221/