MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Andrzej Szulkin

Tentamensskrivning i
Analys IV, 7,5 hp
den 20 maj 2015 kl. 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna.

15 poäng, inklusive bonus, ger säkert godkänt. Dock måste minst 2 poäng komma från teoridelen. Gamla bonuspoäng, dvs. poäng intjänade HT 14 eller tidigare ***räknas inte****.*

OBS! Ange antalet bonuspoäng på skrivningsomslaget.

1. Undersök om funktionen $f(x,y) = (x^2 - y)e^{-x-y}$ har ett största och ett minsta värde i området $x \geq 0$, $y \geq 0$ och bestäm dem i förekommande fall. 5 p

2. Låt Y vara halvsfären $x^2+y^2+z^2 = 4$, $z \geq 0$ och låt $\mathbf{F} = (x^3+yz, y^3+zx, z^3+xy)$. Beräkna $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$. Ytan Y är orienterad uppåt. 5 p

3. Beräkna $\int_\gamma y\,dx+(5y^4z+z)\,dy+(x+y^5)\,dz$, där γ är skärningskurvan mellan ytan $z = x^2+\dfrac{y^2}{4}$ och planet $z = 4x$, orienterad moturs uppifrån sett. 5 p

4. Beräkna $\int_\gamma \dfrac{dz}{(z^2-4)(z^2+1)}$ i följande två fall: a) γ är cirkeln $|z-1-i| = 2$ orienterad moturs, b) γ är cirkeln $|z-2| = 2$ orienterad moturs. 5 p

5. a) Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^\infty \dfrac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$ konvergerar eller divergerar. 2,5 p

   b) För vilka x konvergerar serien $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k\sqrt{k}+1}$? 2,5 p

Teoridel

Välj ***<u>en av</u>*** *följande två uppgifter:*

6. Formulera divergenssatsen. Bevisa den för områden i rummet med en under- och en översida. Skissera sedan hur man genomför beviset för områden med en vänster- och en högersida och en bak- och en framsida. Skissera också hur divergenssatsen kan fås för mer allmänna områden i rummet. 5 p

7. (Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier) Antag att: (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$, (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ är konvergent och att $0 \leq s \leq a_1$. 5 p

Skrivningsåterlämning torsdag den 28 maj kl. 15.00 i sal 16, därefter i rum 204, hus 6.