Lösningar till tentamen i Analys IV
den 20 maj 2015

1. $f'_x(x,y) = (2x-(x^2-y))e^{-x-y}$, $f'_y(x,y) = (-1-(x^2-y))e^{-x-y}$. $f'_x = f'_y = 0$ om och endast om $2x = x^2-y$ och $-1 = x^2-y$, vilket ger $x = -\frac{1}{2}$. Nu behöver vi inte gå vidare, för vi ser redan här att en eventuell stationär punkt måste ligga utanför området.
Vi undersöker randen. I hörnpunkten $(0,0)$ är $f = 0$.
Låt $h_1(x) = f(x,0) = x^2e^{-x}$, $x > 0$. Vi får $h_1'(x) = (2x-x^2)e^{-x} = 0$ då $x = 2$ och $h_1(2) = f(2,0) = 4/e^2$.
Låt $h_2(y) = f(0,y) = -ye^{-y}$, $y > 0$. Nu får vi $h_2'(y) = (-1+y)e^{-y} = 0$ då $y = 1$ och $h_2(1) = f(0,1) = -1/e$.
Vi undersöker också gränsvärdet då $x^2+y^2 \to \infty$ och $x, y \geq 0$. I polära koordinater är $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (r^2\cos^2\theta - r\sin\theta)e^{-r(\cos\theta+\sin\theta)}$. Eftersom $\cos\theta+\sin\theta \geq \sqrt{2}$ i första kvadranten, är $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq (r^2+r)e^{-r\sqrt{2}}$ och eftersom $r^2/e^{r\sqrt{2}} \to 0$ och $r/e^{r\sqrt{2}} \to 0$ då $r \to \infty$, så har vi visat att $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2\to\infty \\ x,y\geq 0}} f(x,y) = 0$.
Nu ser vi att funktionen har ett största och ett minsta värde och de är $4/e^2$ resp. $-1/e$.

2. Låt Y_1 vara ytan $z = 0$, $x^2+y^2 \leq 4$ (”bottenytan”) orienterad nedåt och låt $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$. Då begränsas K av ytan $Y \cup Y_1$, och den är orienterad utåt. I rymdpolära koordinater svarar kroppen mot mängden $E = \{(r,\varphi,\theta) : 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Eftersom $\operatorname{div}\mathbf{F} = 3(x^2+y^2+z^2)$, ger Gauss sats

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 3\iiint_K (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = 3\iiint_E r^4\sin\theta\,drd\varphi d\theta$$
$$= 3\int_0^2 r^4\,dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta = \frac{192\pi}{5}[-\cos\theta]_0^{\pi/2} = \frac{192\pi}{5}.$$

Man kan även beräkna trippelintegralen genom att antingen gå över till polära koordinater, integrera m.a.p. xy först och sedan m.a.p. z, eller genom att integrera m.a.p. z först. Räkningarna blir dock svårare.
Vi måste också beräkna ytintegralen över Y_1. Eftersom $\mathbf{N} = (0,0,-1)$ och $z = 0$ här, så är

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} (x^3, y^3, xy)\cdot(0,0,-1)\,dS = -\iint_{Y_1} xy\,dS = [\text{symmetri}] = 0.$$

Alltså är $\displaystyle\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{192\pi}{5}$.

3. Låt $\mathbf{F} = (y, 5y^4z+z, x+y^5)$. Vi använder Stokes sats. På kurvan γ är $x^2+y^2/4 = 4x$, vilket efter kvadratkomplettering ger $(x-2)^2+y^2/4 = 4$. Beteckna den del av planet $z = 4x$ där

$(x-2)^2+y^2/4 \le 4$ med Y. En parametrisering av Y är $\mathbf{r}=(x,y,4x)$. Så $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-4,0,1)$ (normalen har rätt riktning). Eftersom $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (-1,-1,-1)$, får vi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{(x-2)^2+y^2/4\le 4} (-1,-1,-1)\cdot(-4,0,1)\,dxdy$$

$$= 3\iint_{(x-2)^2+y^2/4\le 4} dxdy = [x=2+r\cos\theta,\ y=2r\sin\theta] = 3\iint_{\substack{0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi}} 2r\,drd\theta = 6\pi\int_0^2 2r\,dr = 24\pi.$$

4. a) Integranden är analytisk utom i punkterna ± 2 och $\pm i$. Cirkelns medelpunkt är $1+i$ och avståndet från den till punkterna 2 och i är < 2 medan avståndet till -2 och $-i$ är > 2. Så $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2-4)(z^2+1)} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z^2-4)(z^2+1)} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2-4)(z^2+1)}$, där γ_1 och γ_2 är två moturs orienterade cirklar med medelpunkterna i 2 resp. i, och radier sådana att cirklarna inte skär varandra och ligger innanför γ. Vi beräknar integralerna:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z^2-4)(z^2+1)} = \int_{\gamma_1} \underbrace{\frac{1}{(z+2)(z^2+1)}}_{f(z)} \frac{dz}{z-2} = 2\pi i f(2) = 2\pi i \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{\pi i}{10},$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2-4)(z^2+1)} = \int_{\gamma_2} \underbrace{\frac{1}{(z^2-4)(z+i)}}_{g(z)} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i g(i) = 2\pi i \frac{1}{-5\cdot 2i} = -\frac{\pi}{5}.$$

Resultatet blir $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2-4)(z^2+1)} = \frac{\pi i}{10} - \frac{\pi}{5} = \frac{(-2+i)\pi}{10}$.

b) Här är cirklens medelpunkt 2, och 2 är den enda av punkterna ± 2, $\pm i$ som ligger innanför cirkeln. Så om f är som ovan, får vi nu $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z^2-4)(z^2+1)} = 2\pi i f(2) = \frac{\pi i}{10}$.

5. a) Eftersom integralen är generaliserad i origo och i oändligheten delar vi upp den i två integraler: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx + \int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx = I_1 + I_2$. Maclaurinutveckling ger $\cos x = 1 - x^2/2 + O(x^4)$, så $(1-\cos x)/x^{5/2} = 1/(2\sqrt{x}) + O(x^{1/2})$ och $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)/x^{5/2}}{1/(2\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$. Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ är konvergent, är också I_1 konvergent enligt jämförelsekriterium II. Eftersom $0 \le (1-\cos x)/x^{5/2} \le 2/x^{5/2}$ och $\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/2}}\,dx$ är konvergent, konvergerar också I_2 enligt jämförelsekriterium I. Alltså konvergerar den givna integralen.

b) Vi använder kvotkriteriet:

$$\frac{|x|^{k+1}}{2^{k+1}\sqrt{k+1}+1}\,\frac{2^k\sqrt{k}+1}{|x|^k} = \frac{|x|\cdot 2^k(\sqrt{k}+1/2^k)}{2^{k+1}(\sqrt{k+1}+1/2^{k+1})} = \frac{|x|}{2}\,\frac{1+1/(2^k\sqrt{k})}{\sqrt{1+1/k}+1/(2^{k+1}\sqrt{k})} \to \frac{|x|}{2}$$

då $k\to\infty$. Så serien konvergerar för $|x|<2$ och divergerar för $|x|>2$. Sätt $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}+2^{-k}}$. För $x=2$ är seriens k:te term lika med a_k. Eftersom $\frac{1/(\sqrt{k}+2^{-k})}{1/\sqrt{k}} \to 1$ då $k\to\infty$ och $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergerar, divergerar också $\sum_{k=1}^\infty a_k$ enligt jämförelsekriterium II. För $x=-2$ är vår serie $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$ och eftersom a_k avtar mot 0, konvergerar serien enligt Leibniz kriterium. Att a_k är avtagande kan man t.ex. se på följande sätt: $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{k}+2^{-k}} > \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+2^{-k-1}} \Leftrightarrow \sqrt{k+1}+2^{-k-1} > \sqrt{k}+2^{-k} \Leftrightarrow \sqrt{k+1} > \sqrt{k}+2^{-k-1} \Leftrightarrow_{(kvadrera)} k+1 > k+\sqrt{k}\,2^{-k}+2^{-2k-2}$. Tar man bort k, ser man att sista olikheten gäller (det är lätt att se att den gäller för stora k, vilket räcker för slutsatsen, men den gäller faktiskt för alla $k \geq 1$).

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.