**Lösningar till tentamen i Analys IV**

**den 17 augusti 2015**

**1.** Låt $\gamma_1$ vara ellipsen $x^2+2y^2=1$ tagen ett varv moturs och låt $D$ vara området mellan $\gamma$ och $\gamma_1$. Eftersom $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{-x^2+2y^2}{(x^2+2y^2)^2}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$, ger Greens sats att $\displaystyle\int_{\gamma-\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$, dvs. $\displaystyle\int_{\gamma}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. En parametrisering av $\gamma_1$ är $\mathbf{r}(t)=\Big(\cos t,\frac{1}{\sqrt2}\sin t\Big)$, $0\le t\le 2\pi$. Så

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\gamma_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sqrt2}\sin t,\cos t\right)\cdot\left(-\sin t,\frac{1}{\sqrt2}\cos t\right)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt2}\,dt=\sqrt2\pi.$$

**2.** Vi lägger till ytorna $Y_1=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,\ z=1\}$ ("locket") och $Y_2=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,\ z=0\}$ ("bottnet"). $Y,Y_1,Y_2$ begränsar kroppen $K=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1\}$. Ytan $Y$ är orienterad utåt och vi orienterar även $Y_1,Y_2$ utåt. Eftersom $\operatorname{div}\mathbf{F}=x^2+y^2+z$, ger Gauss sats

$$\begin{aligned}\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS+\iint_{Y_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS&=\iiint_K(x^2+y^2+z)\,dxdydz\\ &=\iint_{x^2+y^2\le1}\left(\int_0^1(x^2+y^2+z)\,dz\right)dxdy=\iint_{x^2+y^2\le1}\left(x^2+y^2+\frac12\right)dxdy\\ &=[\text{polära koordinater}]=\iint_{\substack{0\le r\le1\\0\le\theta\le2\pi}}\left(r^3+\frac12 r\right)drd\theta=\pi\int_0^1(2r^3+r)\,dr=\pi.\end{aligned}$$

Vi beräknar ytintegralerna över $Y_1$ och $Y_2$. På $Y_1$ är $\mathbf{N}=(0,0,1)$, så $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=(*,*,x^2+y^2)\cdot(0,0,1)=x^2+y^2$. En parametrisering av ytan är $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,1)$. Så $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=\mathbf{N}$, $dS=dxdy$ och $\displaystyle\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2)\,dxdy=\frac12\pi$ (liknande beräkning som ovan). På $Y_2$ är $\mathbf{N}=(0,0,-1)$ och $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}=(*,*,0)\cdot(0,0,-1)=0$, så $\displaystyle\iint_{Y_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=0$. Nu kan vi beräkna den sökta integralen:

$$\iint_Y\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iiint_K(x^2+y^2+z)\,dxdydz-\iint_{Y_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS-\iint_{Y_2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\pi-\frac12\pi-0=\frac12\pi.$$

**3.** Vi använder Stokes sats på ytan $Y=\{z=x^2-y^2,\ x^2+y^2\le1\}$. Eftersom $\gamma$ är orienterad moturs uppifrån sett, skall $Y$ vara orienterad uppåt (dvs. normalen skall ha positiv $z$-koordinat). En parametrisering av $Y$ är $\mathbf{r}(x,y)=(x,y,x^2-y^2)$, $x^2+y^2\le1$. Eftersom $\mathbf{r}'_x\times\mathbf{r}'_y=(-2x,2y,1)$ och $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}=(0,-1,-1)$, får vi

$$\begin{aligned}\int_\gamma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\iint_Y\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS=\iint_{x^2+y^2\le1}(0,-1,-1)\cdot(-2x,2y,1)\,dxdy=\\ &=\iint_{x^2+y^2\le1}(-2y-1)\,dxdy=[\text{symmetri}]=-\iint_{x^2+y^2\le1}dxdy=-\pi.\end{aligned}$$

**4.** Integranden är analytisk utom i punkterna 0, 1 och $\pm i$.

a) Tre av dessa punkter, 0 och $\pm i$, ligger innanför $\gamma$. Så

$$\int_\gamma\frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)}=\int_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)},$$

där $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ är moturs orienterade cirklar med medelpunkterna i 0, $i, -i$ och tillräckligt små radier för att cirklarna skall ligga innanför $\gamma$ och inte skära varandra. Vi beräknar integralerna över $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$:

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)} = \int_{\gamma_1} \underbrace{\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}}_{f(z)} \frac{dz}{z} = 2\pi i f(0) = -2\pi i,$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)} = \int_{\gamma_2} \underbrace{\frac{1}{(z^2-z)(z+i)}}_{g(z)} \frac{dz}{z-i} = 2\pi i g(i) = 2\pi i \frac{1}{(-1-i)\cdot 2i} = \frac{(-1+i)\pi}{2},$$

$$\int_{\gamma_3} \frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)} = \int_{\gamma_3} \underbrace{\frac{1}{(z^2-z)(z-i)}}_{h(z)} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i h(-i) = 2\pi i \frac{1}{(-1+i)(-2i)} = \frac{(1+i)\pi}{2}.$$

Så $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)} = -2\pi i + \frac{(-1+i)\pi}{2} + \frac{(1+i)\pi}{2} = -\pi i.$

b) Cirkelns medelpunkt är $\frac{1}{2}$ och det är klart att avståndet från punkterna 0 och 1 till $\frac{1}{2}$ är mindre än 1 medan avståndet från $\pm i$ till $\frac{1}{2}$ är större än 1. Så punkterna 0, 1 ligger innanför $\gamma$ och de övriga två utanför. Om $\gamma_1$ är som ovan och $\gamma_4$ är en moturs orienterad cirkel med medelpunkten i 1 och om dessa cirklar har tillräckligt små radier, så är

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)} = \int_{\gamma_1+\gamma_4} \frac{dz}{(z^2-z)(z^2+1)} = -2\pi i + \int_{\gamma_4} \underbrace{\frac{1}{z(z^2+1)}}_{k(z)} \frac{dz}{z-1}$$

$$= -2\pi i + 2\pi i k(1) = -2\pi i + \pi i = -\pi i.$$

**5.** a) Integralen är generaliserad i origo och i oändligheten, så vi delar upp den i två integraler: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha + x^\beta} = I_1 + I_2$. Eftersom $\displaystyle 0 \leq \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \leq \frac{1}{x^\alpha}$ och $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ konvergerar då $\alpha < 1$, så konvergerar $I_1$. Likaså, eftersom $\displaystyle 0 \leq \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} \leq \frac{1}{x^\beta}$ och $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\beta}$ konvergerar då $\beta > 1$, så konvergerar $I_2$. Alltså konvergerar den givna integralen.

b) Sätt $a_k = k/(k^2+1)$ i den första serien. Det är klart att $a_k \to 0$. Låt $f(x) = x/(x^2+1)$. Eftersom $f'(x) = (1-x^2)/(x^2+1)^2 < 0$ för $x > 1$, så är $a_{k+1} = f(k+1) < f(k) = a_k$, dvs. följden $(a_k)$ är avtagande. (Alternativt kan man beräkna $a_k - a_{k+1}$ och man finner att skillnaden är lika med $\frac{k^2+k-1}{(k^2+1)((k+1)^2+1)} > 0$, vilket också ger $a_k > a_{k+1}$.) Alltså konvergerar den första serien enligt Leibniz kriterium.
Eftersom $k/(k+1) \not\to 0$, divergerar den andra serien.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.