Lösningar till tentamen i Analys IV

den 7 januari 2016

1. a) Eftersom $f \geq 0$ och $f(0,0) = 0$ är det klart att funktionens minsta värde är 0 och eftersom $f(x,0) = x^2 \to \infty$ då $x \to \infty$, så har f inget största värde i området.

b) Även här är det klart att funktionens minsta värde är 0.

Vi söker inre stationära punkter. $f'_x(x,y) = (2x - y(x^2+y^2))e^{-xy}$, $f'_y(x,y) = (2y - x(x^2+y^2))e^{-xy}$, så $f'_x = f'_y = 0$ om och endast om $2x = y(x^2+y^2)$ och $2y = x(x^2+y^2)$. I de inre punkterna är $x, y > 0$. Dividerar vi den första ekvationen med den andra, så får vi $x/y = y/x$, dvs. $y^2 = x^2$ och $y = x$. Detta insatt i den första ekvationen ger $2x = 2x^3$, så $(x,y) = (1,1)$ är den enda inre stationära punkten och $f(1,1) = \dfrac{2}{e}$.

$f(x,y) = [\text{polära koordinater}] = r^2 e^{-r^2\cos\theta\sin\theta} = r^2 e^{-\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta} \to 0$ då $r \to \infty$ eftersom i det givna området är $\sin 2\theta \geq c$, där c är en positiv konstant. Så $\lim_{x^2+y^2\to\infty} f(x,y) = 0$.

Vi undersöker randen. Låt $h_1(x) = f(x, x/2) = \frac{5}{4}x^2 e^{-x^2/2}$, $x > 0$. Vi får $h_1'(x) = (\frac{5}{2}x - \frac{5}{4}x^3)e^{-x^2/2} = 0$ då $x = \sqrt{2}$. Motsvarande värde för f är $h_1(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \dfrac{5}{2e}$.

Låt $h_2(x) = f(x, 2x) = 5x^2 e^{-2x^2}$, $x > 0$. Nu får vi $h_2'(x) = (10x - 20x^3)e^{-2x^2} = 0$ då $x = 1/\sqrt{2}$. Värdet för f blir $h_2(1/\sqrt{2}) = f(1/\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \dfrac{5}{2e}$.

Eftersom $\dfrac{2}{e} < \dfrac{5}{2e}$, är $\dfrac{5}{2e}$ funktionens största värde i området.

2. Låt γ_1 vara linjestycket $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, och låt D vara området som begränsas av γ och γ_1. Observera att $\gamma_1 - \gamma$ är positivt orienterad med avseende på D. Eftersom $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 2y$ så ger Greens sats

$$\int_{\gamma_1-\gamma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D 2y\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} 2y\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[y^2\right]_{y=x}^{y=\sqrt{x}} = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \frac{1}{6}.$$

En parametrisering av γ_1 är $\mathbf{r}(t) = (t,t)$, $0 \leq t \leq 1$, så $\displaystyle\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (0, 2t^2)\cdot(1,1)\,dt = \int_0^1 2t^2\,dt = \frac{2}{3}$.

Det följer att $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

3. Vi lägger till ytorna $Y_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 2,\ z = 1\}$ ("locket") och $Y_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1,\ z = 0\}$ ("bottnet"). Y, Y_1, Y_2 begränsar kroppen $K = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$. Ytan Y är orienterad utåt och vi orienterar även Y_1, Y_2 utåt. Eftersom $\operatorname{div}\mathbf{F} = 4x^3 + 1$, får vi med hjälp av Gauss sats att

$$\iint_Y \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iiint_K (4x^3+1)\,dxdydz = [\text{symmetri m.a.p. } x]$$
$$= \iiint_K dxdydz = \int_0^1 \left(\iint_{x^2+y^2\leq 1+z^2} dxdy \right) dz = \pi \int_0^1 (1+z^2)\,dz = \frac{4\pi}{3}.$$

Vi har använt att dubbelintegralen i andra raden är lika med arean av en cirkelskiva med radien $\sqrt{1+z^2}$.
På Y_1 är $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = (*,*,1)\cdot(0,0,1) = 1$, så $\displaystyle\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{Y_1} dS = 2\pi$ (area av en cirkelskiva med radien

$\sqrt{2}$) och på Y_2 är $\mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = (*,*,0)\cdot(0,0,-1) = 0$, vilket ger $\iint_{Y_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = 0$. Alltså är $\iint_{Y} \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \frac{4\pi}{3} - 2\pi - 0 = -\frac{2\pi}{3}$.

4. Vi använder Stokes sats på ytan $Y = \{z = x + 2y : (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 4\}$. Kurvan γ är orienterad moturs uppifrån sett, så Y skall vara orienterad uppåt (dvs. normalen skall ha positiv z-koordinat). En parametrisering av Y ges av $\mathbf{r}(x,y) = (x, y, x+2y)$, $(x-1)^2+(y-2)^2 \le 4$. Eftersom $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (-1,-2,1)$ (observera att z-koordinaten är positiv) och $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (-2z, 1, 0)$, så får vi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{(x-1)^2+(y-2)^2\le 4} (-2z,1,0)\cdot(-1,2,1)\,dxdy =$$

$$\iint_{(x-1)^2+(y-2)^2\le 4} (2z-2)\,dxdy = \iint_{(x-1)^2+(y-2)^2\le 4} (2x+4y-2)\,dxdy$$

$$= [x = 1 + r\cos\theta,\ y = 2 + r\sin\theta] = \iint_{\substack{0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi}} (8r + 2r^2\cos\theta + 4r^2\sin\theta)\,drd\theta$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} (8r + 2r^2\cos\theta + 4r^2\sin\theta)\,d\theta\right) dr = 16\pi\int_0^2 r\,dr = 32\pi.$$

5. a) Integralen är generaliserad i origo och i oändligheten, så vi delar upp den i två integraler: $\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}\,dx + \int_1^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}}\,dx = I_1 + I_2$.

I_1: Eftersom integranden är positiv, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} \Big/ \frac{1}{x^{1/2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ och $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ konvergerar, så konvergerar I_1 enligt jämförelsekriterium II.

I_2: Vi skall först visa att $\frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} \le \frac{C}{x^{5/4}}$ för alla $x \ge 1$ och något $C > 0$. Eftersom funktionen $x^{5/4}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} = \frac{\ln(1+x)}{x^{1/4}}$ är kontinuerlig för $x \ge 1$ och går mot 0 då $x \to \infty$, så måste den vara begränsad uppåt, dvs. $\frac{\ln(1+x)}{x^{1/4}} \le C$ för något $C > 0$. Det följer att $\frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} \le \frac{C}{x^{5/4}}$, vilket vi ville visa. Eftersom integranden i I_2 är positiv och $\int_1^\infty \frac{C\,dx}{x^{5/4}}$ konvergerar, så konvergerar även I_2 enligt jämförelsekriterium I.
Slutsatsen är att den givna integralen konvergerar.

b) $\frac{2^k + k^{10}}{2^k\cdot k^2}\Big/\frac{1}{k^2} = \frac{2^k+k^{10}}{2^k} = 1 + k^{10}/2^k \to 1$ då $k\to\infty$. Eftersom serien $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ konvergerar, så konvergerar den första serien enligt jämförelsekriterium II.
Låt $a_k = \frac{2^k+k^{10}}{k!}$. $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}+(k+1)^{10}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{2^k+k^{10}} = \frac{2^k(2+(k+1)^{10}/2^k)}{(k+1)k!}\cdot\frac{k!}{2^k(1+k^{10}/2^k)} = \frac{2+(k+1)^{10}/2^k}{1+k^{10}/2^k}\cdot\frac{1}{k+1} \to 2\cdot 0 = 0$ då $k\to\infty$, så den andra serien konvergerar enligt kvotkriteriet.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.