MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Andrzej Szulkin

Tentamensskrivning i
Analys IV, 7,5 hp
den 16 augusti 2016 kl. 9.00-14.00

Inga hjälpmedel tillåtna.

15 poäng, inklusive bonus, ger säkert godkänt. Dock måste minst 2 poäng komma från teoridelen. Gamla bonuspoäng, dvs. poäng intjänade HT 15 eller tidigare ***räknas inte****.*

OBS! Ange antalet bonuspoäng på skrivningsomslaget.

1. Låt $f(x,y) = \dfrac{x-2y}{1+x^2+y^2}$. Bestäm största och minsta värde för f eller visa att de inte existerar: a) i hela $\mathbf{R}^2$, b) i området $y \geq 0$. 5 p

2. Beräkna $\displaystyle\int_\gamma -\frac{y}{x^2+3y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+3y^2}\,dy$ i följande två fall: a) γ är halvcirkeln $x^2+y^2=1$, $y \geq 0$, b) γ är den del av cirkeln $x^2+y^2=1$, där $y \geq 0$ och $y \geq x$. I båda fallen är γ orienterad moturs. 5 p

3. Låt γ vara skärningskurvan mellan cylindern $x^2+(y-1)^2=1$ och planet $z=y$, orienterad moturs uppifrån sett, och låt $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^3+z^3,\ z^3+x^3,\ x^3+y^3)$. Beräkna $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. 5 p

4. Beräkna $\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)(z^2-4z+5)}$ i följande två fall: a) Γ är cirkeln $|z-2-i|=1$ orienterad moturs, b) Γ är triangeln med hörn i 0, $3+3i$ och $3-\frac{1}{2}i$, orienterad moturs. 5 p

5. a) För vilka x konvergerar serien $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-kx}$? 2, 5 p

   b) Avgör om var och en av de generaliserade integralerna $\displaystyle\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$ och $\displaystyle\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$ konvergerar eller divergerar. 2, 5 p

Teoridel

Välj ***en av*** *följande två uppgifter:*

6. Formulera divergenssatsen. Bevisa den för områden i rummet med en under- och en översida. Skissera sedan hur man genomför beviset för områden med en vänster- och en högersida och en bak- och en framsida. Skissera också hur divergenssatsen kan fås för mer allmänna områden i rummet. 5 p

7. (Leibniz konvergenskriterium för alternerande serier) Antag att: (i) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$, (ii) $a_k \to 0$ då $k \to \infty$. Visa att den alternerande serien $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ är konvergent och att $0 \leq s \leq a_1$. 5 p

Skrivningsåterlämning fredag den 19 augusti kl. 13.00 i rum 325, hus 6, därefter i rum 204, hus 6.