Lösningar till tentamen i Analys IV
den 16 augusti 2016

1. a) $f'_x(x,y) = \dfrac{1+x^2+y^2-2x(x-2y)}{(1+x^2+y^2)^2}$, $f'_y(x,y) = \dfrac{-2(1+x^2+y^2)-2y(x-2y)}{(1+x^2+y^2)^2}$. Så $f'_x = f'_y = 0$ om och endast om $1+x^2+y^2 = 2x(x-2y)$ och $-2(1+x^2+y^2) = 2y(x-2y)$. Dividerar vi den första ekvationen med den andra (vänsterleden är aldrig 0), så får vi $-1/2 = x/y$ och $y = -2x$. Detta insatt i 1:a ekvationen ger $5x^2 = 1$. Vi får två stationära punkter: $(1/\sqrt{5},\, -2/\sqrt{5})$ och $(-1/\sqrt{5},\, 2/\sqrt{5})$. Vi sparar värdena $f(1/\sqrt{5},\, -2/\sqrt{5}) = \sqrt{5}/2$ och $f(-1/\sqrt{5},\, 2/\sqrt{5}) = -\sqrt{5}/2$.
$\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} |f(x,y)| = [\text{polära koordinater}] = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{|r\cos\theta - 2r\sin\theta|}{1+r^2} \le \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{3r}{1+r^2} = 0.$
Det följer att funktionens största värde är $\sqrt{5}/2$ och minsta värde är $-\sqrt{5}/2$.

b) Här ligger bara punkten $(-1/\sqrt{5},\, 2/\sqrt{5})$ i området. Vi behöver undersöka randen. Låt $h(x) = f(x,0) = \dfrac{x}{1+x^2}$. $h'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ då $x = \pm 1$. Vi sparar värdena $f(\pm 1, 0) = \pm 1/2$. Eftersom $f(x,y) \to 0$ då $x^2+y^2 \to \infty$ och $-\sqrt{5}/2 < -1/2$, så är funktionens största och minsta värde här $1/2$ resp. $-\sqrt{5}/2$.

2. Låt $P(x,y) = -y/(x^2+3y^2)$ och $Q(x,y) = x/(x^2+3y^2)$. Vi noterar att $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y = (3y^2-x^2)/(x^2+3y^2)^2$.
a) Låt γ_1 vara den övre halvan av ellipsen $x^2+3y^2 = 1$, orienterad moturs och beteckna området mellan γ och γ_1 med D. Greens sats ger $\int_{\gamma-\gamma_1} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_D (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dxdy = 0$, så integralen över γ är lika med integralen över γ_1. En parametrisering av γ_1 är $\mathbf{r}(t) = (\cos t,\, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t)$, $0 \le t \le \pi$. Så med $\mathbf{F} = (P,Q)$ får vi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_0^\pi (-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,\, \cos t)\cdot(-\sin t,\, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t)\,dt = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

b) γ är den del av halvcirkeln $x^2+y^2 = 1$, $y \ge 0$, som börjar i punkten $(1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})$ och slutar i punkten $(-1,0)$. Låt γ_1 vara den del av ellipsen $x^2+3y^2 = 1$ som börjar i $(1/2,\, 1/2)$ och slutar i $(-1,0)$, och låt γ_2 vara linjestycket från $(1/2,\, 1/2)$ till $(1/\sqrt{2},\, 1/\sqrt{2})$. γ, γ_1 och γ_2 begränsar ett område D (rita en figur) och Greens sats ger att $\int_{\gamma-\gamma_1+\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$. Låt $\mathbf{r}(t) = (t,t)$ vara en parametrisering av γ_2. Eftersom $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{4t}(-1,1)\cdot(1,1) = 0$, så är $\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$ och $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. En parametrisering av γ_1 är $\mathbf{r}(t) = (\cos t,\, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t)$, $\pi/3 \le t \le \pi$. Att den nedre gränsen är $\pi/3$ (och ej $\pi/4$ som man kan tro) följer ur sambandet $(\cos t,\, \frac{1}{\sqrt{3}}\sin t) = (\frac{1}{2},\, \frac{1}{2})$. Nu kan vi beräkna integralen:

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\pi/3}^\pi (-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t,\, \cos t)\cdot(-\sin t,\, \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t)\,dt = \int_{\pi/3}^\pi \frac{dt}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3. Skärningskurvan begränsar den del Y av planet $z = y$ som ligger innanför cylindern. Så $Y = \{(x,y,z) : y = z,\ x^2+(y-1)^2 \le 1\}$. Vi använder Stokes sats. En parametrisering av Y är $\mathbf{r}(x,y) = (x,y,y)$. Vi får $\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = (0,-1,1)$ och eftersom z-koordinaten är positiv, så är γ rätt orienterad med avseende på Y. Så

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\,dS = \iint_{x^2+(y-1)^2\le 1} (3y^2-3z^2,\, 3z^2-3x^2,\, 3x^2-3y^2)\cdot(0,-1,1)\,dxdy$$

$$= [\text{eftersom } z = y] = \iint_{x^2+(y-1)^2\le 1} (6x^2-6y^2)\,dxdy = [x = r\cos\theta,\ y = 1+r\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi]$$

$$= 6\int_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} r(r^2\cos^2\theta - (1+r\sin\theta)^2)\,drd\theta = 6\int_{\substack{0\le r\le 1\\ 0\le\theta\le 2\pi}} (r^3(\cos^2\theta-\sin^2\theta) - r - 2r^2\sin\theta)\,drd\theta$$

$$= 6\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r^3\cos 2\theta - r - 2r^2\sin\theta)\,d\theta\right) dr = 6\int_0^1 \left[\frac{1}{2}r^3\sin 2\theta - r\theta + 2r^2\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr$$

$$= -12\pi\int_0^1 r\,dr = -6\pi.$$

4. Eftersom polynomet $(z-1)(z^2-4z+5)$ ha tre nollställen: 1, $2+i$ och $2-i$, så är integranden analytisk utom i dessa tre punkter. Vi kommer att behöva faktoriseringen $z^2-4z+5 = (z-2-i)(z-2+i)$.

a) Eftersom avståndet från punkten $2+i$ till var och en av punkterna 1 och $2-i$ överstiger 1, så är det bara $2+i$ som ligger innanför Γ. Det följer att

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)(z^2-4z+5)} = \int_\Gamma \underbrace{\frac{1}{(z-1)(z-2+i)}}_{f(z)} \frac{dz}{z-2-i} = 2\pi i f(2+i) = \frac{\pi}{1+i} = \frac{(1-i)\pi}{2}.$$

b) Genom att rita triangeln ser vi att punkterna 1 och $2+i$, men ej $2-i$, ligger innanför Γ. Låt Γ_1, Γ_2 vara två moturs orienterade cirklar som ligger innanför Γ och inte skär varandra, Γ_1 med medelpunkten i $2+i$, Γ_2 med medelpunkten i 1. Vi får

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)(z^2-4z+5)} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(z-1)(z^2-4z+5)} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(z-1)(z^2-4z+5)}$$

$$= \underbrace{\frac{(1-i)\pi}{2}}_{\text{(enligt a-uppgiften)}} + \int_{\Gamma_2} \underbrace{\frac{1}{z^2-4z+5}}_{g(z)} \frac{dz}{z-1} = \frac{(1-i)\pi}{2} + 2\pi i g(1) = \frac{(1-i)\pi}{2} + \pi i = \frac{(1+i)\pi}{2}.$$

5. a) Låt $a_k = ke^{-kx}$. Vi använder kvotkriteriet.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)e^{-(k+1)x}}{ke^{-kx}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-x} \to e^{-x} \quad \text{då } k\to\infty.$$

Eftersom $0 < e^{-x} < 1$ när $x > 0$ och $e^{-x} > 1$ när $x < 0$, så konvergerar serien för $x > 0$ och divergerar för $x < 0$. (Det går också bra att använda rotkriteriet.) För $x = 0$ kan varken kvot- eller rotkriteriet användas (gränsvärdet blir 1), men eftersom $a_k = k$ då, så divergerar serien. Slutsatsen blir att serien konvergerar om och endast om $x > 0$.

b) I båda fallen är integranderna positiva och integralerna är generaliserade enbart i oändligheten. Eftersom $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \to 1$ då $t \to 0$, så är det naturligt att jämföra den första integranden med $1/x$ och den andra med $1/x^2$.

Eftersom $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x)}{1/x} = [1/x = t] = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ och $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergerar, så divergerar även $\displaystyle\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$.

På liknande sätt får vi att $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+1/x^2)}{1/x^2} = [1/x^2 = t] = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ och eftersom $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ konvergerar, så konvergerar även $\displaystyle\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

För tal 6 och 7 hänvisas till kurslitteraturen.